

Correction du DS n°8.

Exercice 1

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Déterminer un équivalent simple, lorsque $n \rightarrow +\infty$, de $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$. En déduire la limite de u_n

On a $u_n = \left(n(1 + \frac{1}{n})\right)^{\frac{1}{2}} - \left(n(1 - \frac{1}{n})\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{n} \left(1 + \frac{1}{2n} + o_{n \rightarrow +\infty}(\frac{1}{n})\right) - \left(1 - \frac{1}{2n} + o_{n \rightarrow +\infty}(\frac{1}{n})\right) = \sqrt{n} \times \left(\frac{1}{n} + o_{n \rightarrow +\infty}(\frac{1}{n})\right) = \frac{1}{\sqrt{n}} + o_{n \rightarrow +\infty}(\frac{1}{\sqrt{n}})$ et donc $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$ et sa limite est donc nulle.

$$2. \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)} = \frac{1}{x} \left(1 - \frac{1}{1 - \frac{x}{2} + o_0(x)}\right) = \frac{1}{x} \left(\frac{x}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x)\right) = \frac{1}{2} + o_{x \rightarrow 0}(1)$$

3. On considère $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \text{ tel que } P(1) - \int_0^1 P(t)dt = 0\}$. Montrer que F est un espace vectoriel, et en déterminer une base.

Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$ on a $P \in F \Leftrightarrow a + b + c - \left(\frac{a}{3} + \frac{b}{2} - c\right) = 0 \Leftrightarrow 6a - 2a + 6b - 3b = 0 \Leftrightarrow 4a + 3b = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{3}{4}b$ donc $F = \{-\frac{3}{4}bX^2 + bX + c, (b, c) \in \mathbb{R}^2\} = \text{vect}\left(-\frac{3}{4}X^2 + X, 1\right)$ la famille $(-\frac{3}{4}X^2 + X, 1)$ est donc une famille génératrice, et comme elle est formée de deux polynômes non colinéaires elle est libre : c'est donc une base de F .

4. Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f((x, y, z)) = (2x + y + z, x - y - z)$$

Montrer que f est linéaire. Déterminer une base de son noyau et de son image. f est-elle injective, surjective, bijective?

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors

$$\begin{aligned} f(\lambda(x, y, z) + (x', y', z')) &= f(\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z') = (2\lambda x + 2x' + \lambda y + y' + \lambda z + z', \lambda x + x' - \lambda y - y' - \lambda z - z') \\ &= \lambda(2x + y + z, x - y - z) + (2x' + y' + z', x' - y' - z') = \lambda f(x, y, z) + f(x', y', z') \end{aligned}$$

$$\text{et } (x, y, z) \in \ker(f) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ -3y - 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -z \end{cases} \Leftrightarrow (\exists z \in \mathbb{R} / (x, y, z) = (0, -z, z)) \text{ son}$$

noyau est donc la droite engendrée par le vecteur $(0, -1, 1)$, la famille formée de ce seul vecteur en est une base. De plus, l'image de f est l'espace engendré par $f(1, 0, 0), f(0, 1, 0)$ et $f(0, 0, 1)$, i.e. par $(2, 1), (1, -1)$ et $(1, -1)$, comme les deux premiers sont non colinéaires, ils engendrent tout $\mathbb{R}^2$ et donc l'image de f est $\mathbb{R}^2$ (la base canonique de $\mathbb{R}^2$ conviendra alors). Comme son noyau n'est pas $\{(0, 0, 0)\}$ elle n'est pas injective, et comme son image est $\mathbb{R}^2$ elle est surjective

Exercice 2 : une équation différentielle.

On note $\Delta^2(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ deux fois dérivables, et E l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ deux fois dérivables et solutions de l'équation différentielle :

$$y'' + 2xy' + x^2y = 0 \quad (H)$$

1. (a) **SEV1** $E \subset \Delta^2(\mathbb{R})$ par définition.

SEV2 La fonction nulle vérifie l'équation différentielle (H) donc $E \neq \emptyset$.

SEV3 $\forall (y_1, y_2) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$$(\lambda y_1 + y_2)'' + 2x(\lambda y_1 + y_2)' + x^2(\lambda y_1 + y_2) = \lambda(y_1'' + 2xy_1' + x^2y_1) + (y_2'' + 2xy_2' + x^2y_2) = 0 \text{ donc } \lambda y_1 + y_2 \in E.$$

Conclusion : E est un sous-espace vectoriel de $\Delta^2(\mathbb{R})$.

- (b) Comme $f \in E$, $f'' = -2xf' - x^2f$ donc f'' est dérivable sur $\mathbb{R}$ d'où $f \in \Delta^3(\mathbb{R})$.

Or $\forall x \in \mathbb{R}$, $\tilde{f}(x) = f'(x) + xf(x)$, on en déduit que $\tilde{f} \in \Delta^2(\mathbb{R})$.

De plus, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\tilde{f}'(x) = f''(x) + f(x) + xf'(x)$ et $\tilde{f}''(x) = f'''(x) + 2f'(x) + xf''(x)$.

d'où $\tilde{f}''(x) + 2x\tilde{f}'(x) + x^2\tilde{f}(x)$

$$= f'''(x) + 2f'(x) + xf''(x) + 2x(f''(x) + f(x) + xf'(x)) + x^2(f'(x) + xf(x))$$

$$\text{Or } f''(x) + 2xf'(x) + x^2f(x) = 0 \text{ d'où } f'''(x) + 2f'(x) + 2xf''(x) + 2xf(x) + x^2f'(x).$$

On obtient en reportant $f'''(x)$ dans la première égalité

$$\tilde{f}''(x) + 2x\tilde{f}'(x) + x^2\tilde{f}(x) = x(f''(x) + 2xf'(x) + x^2f(x)) = 0 \text{ donc } \tilde{f} \in E.$$

2. (a) $\forall (y_1, y_2) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, U(\lambda y_1 + y_2) = g$ avec $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = (\lambda y_1 + y_2)'(x) + x(\lambda y_1 + y_2)(x)$

$$\text{soit } g(x) = \lambda(y_1'(x) + xy_1(x)) + (y_2'(x) + xy_2(x)) = \lambda\tilde{y}_1(x) + \tilde{y}_2(x)$$

$$\text{donc } U(\lambda y_1 + y_2) = \lambda\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 = \lambda U(y_1) + U(y_2) \text{ donc } U \in \mathcal{L}(E)$$

- (b) Posons $h = U(U(f))$, on a alors $h(x) = \tilde{f}'(x) + x\tilde{f}(x) = f''(x) + 2xf'(x) + x^2f(x) + f(x) = f(x)$

$$\text{donc } U(U(f)) = f \text{ soit } U^2 = I_E \text{ donc } U \text{ est une symétrie vectorielle de } E.$$

- (c) On a alors $E = \ker(U - I_E) \oplus \ker(U + I_E)$.

$$\text{Or } f \in \ker(U - I_E) \iff U(f) = f \iff f' + xf = f \iff f' + (x-1)f = 0 \iff f \in F.$$

$$\text{De même, } f \in \ker(U + I_E) \iff U(f) = -f \iff f' + xf = -f \iff f' + (x+1)f = 0 \iff f \in G.$$

$$\text{On en déduit donc que } E = F \oplus G.$$

- (d) • $(H_1) \iff \exists \lambda_1 \in \mathbb{R}, y = \lambda_1 e^{-A_1}$ avec $A_1(x) = \int (x+1) dx = \frac{(x+1)^2}{2}$

$$\text{soit } (H_1) \iff \exists \lambda_1 \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y(x) = \lambda_1 e^{-\frac{(x+1)^2}{2}}.$$

$$\bullet \text{ On montre de même que } (H_2) \iff \exists \lambda_2 \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y(x) = \lambda_2 e^{-\frac{(x-1)^2}{2}}.$$

$$\bullet E \iff \exists (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}, y(x) = \lambda_1 e^{-\frac{(x+1)^2}{2}} + \lambda_2 e^{-\frac{(x-1)^2}{2}}$$

Exercice 3

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}^+$ par $f_n : x \mapsto x\sqrt{1 + \frac{x}{n}}$. Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}^+$ qui est un intervalle, $f_n(0) = 0 \leq 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x \in \mathbb{R}^+$ tel que $f_n(x) = 1$. De plus, f_n est strictement croissante en tant que produit de fonctions strictement croissantes et positives et cela garantit l'unicité d'une solution à l'équation $f_n(x) = 1$
2. (a) En réappliquant le TVI mais cette fois-ci sur l'intervalle $[0, 1]$ comme $f_n(0) = 0 \leq 1 \leq \sqrt{1 + \frac{1}{n}} = f_n(1)$, on peut garantir que la solution se trouve dans l'intervalle $[0, 1]$
 (b) On a $x_n = \frac{1}{1 + \frac{x_n}{n}}$ or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{n} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{x_n}{n}} = 1$ i.e. $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 1$
3. (a) On a $x_n(1 + \frac{x_n}{n})^{1/2} = x_n(1 + \frac{1}{2}\frac{x_n}{n} + o_{n \rightarrow +\infty}(\frac{1}{n})) = x_n + \frac{x_n^2}{2n} + o(\frac{1}{n}) = 1$ donc $x_n = 1 - \frac{x_n^2}{2n} + o(\frac{1}{n})$.
 (b) Comme $x_n = 1 + o(1)$ on a $x_n^2 = 1 + o(1)$ ce qui donne le résultat voulu
 (c) $\ln(x_n) = \frac{-1}{2n} + o_{n \rightarrow +\infty}(\frac{1}{n})$ d'où $\ln(x_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{-1}{2n}$.
4. En faisant cette fois-ci le DL à l'ordre 2 on a $x_n = (1 + \frac{x_n}{n})^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}\frac{x_n}{n} + \frac{3}{8}\frac{x_n^2}{n^2} + o_{n \rightarrow +\infty}(\frac{1}{n^2})$ donc

$$x_n = 1 - \frac{1}{2} \frac{1 - \frac{1}{2n} + o_{n \rightarrow +\infty}(\frac{1}{n})}{n} + \frac{3}{8n^2} + o_{n \rightarrow +\infty}(\frac{1}{n^2}) = 1 - \frac{1}{2n} + \frac{5}{8n^2} + o_{n \rightarrow +\infty}(\frac{1}{n^2})$$
 donc

$$\alpha = \frac{5}{8}$$