

Correction du DS n°7.

Question de cours - Exercices d'application du cours

1. Énoncer (avec les hypothèses) et démontrer la formule de Taylor-Young
2. Effectuons un développement limité du numérateur et du dénominateur à l'ordre 2. On a $\frac{1+\ln(1+x)-e^x}{1-\cos x} = \frac{1+x-\frac{x^2}{2}-1-x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{1-1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)} = \frac{-x^2+o(x^2)}{\frac{x^2}{2}+o(x^2)} = -2 + o(1)$.

La limite recherchée est donc égale à -2 .

3. Le dénominateur se factorise en $(X^2 - 1)^2 = (X - 1)^2(X + 1)^2$. Il faut donc étudier la partie polaire relative à $+1$ et à -1 . Commençons par étudier la partie polaire relative à -1 . Elle s'écrit sous la forme $\frac{2X^2+1}{(X-1)^2(X+1)^2} = \frac{\lambda_1}{X+1} + \frac{\lambda_2}{(X+1)^2} + G(X)$,

où G est une fraction rationnelle dont -1 n'est pas un pôle. Multipliant cette égalité par $(X + 1)^2$ et faisant $X = -1$, on trouve $\lambda_2 = 3/4$. On calcule ensuite $\frac{2X^2+1}{(X-1)^2(X+1)^2} - \frac{3/4}{(X+1)^2} = \frac{(5X+1)/4}{(X+1)(X-1)^2} = \frac{\lambda_1}{X+1} + G(X)$.

On multiplie cette fois par $X + 1$, et on fait $X = -1$, et on trouve $\lambda_1 = -1/4$. Pour étudier la partie polaire relative à 1 , on peut procéder de la même façon ou simplement remarquer que la fraction rationnelle est paire. On en déduit que $\frac{2X^2+1}{(X-1)^2(X+1)^2} = \frac{-1/4}{X+1} + \frac{3/4}{(X+1)^2} + \frac{1/4}{X-1} + \frac{3/4}{(X-1)^2}$.

4. Soit $z \in \mathbb{C}$, on résout $z^6 + z^3 + 1 = 0$. En posant $u = z^3$ cela revient à résoudre $u^2 + u + 1 = 0$ donc il y a deux possibilités $u = e^{\pm \frac{2i\pi}{3}}$. La première valeur possible pour u a 3 racines troisièmes qui sont $e^{\frac{2i\pi}{9}}, e^{\frac{8i\pi}{9}}, e^{\frac{14i\pi}{9}}$ et la deuxième aussi, qui sont $e^{-\frac{2i\pi}{9}}, e^{\frac{4i\pi}{9}}, e^{\frac{10i\pi}{9}}$. Comme il est unitaire et qu'il a autant de racine que son degré, le polynôme est scindé et s'écrit $P = (X - e^{\frac{2i\pi}{9}})(X - e^{\frac{8i\pi}{9}})(X - e^{\frac{14i\pi}{9}})(X - e^{-\frac{2i\pi}{9}})(X - e^{\frac{4i\pi}{9}})(X - e^{\frac{10i\pi}{9}})$. En remarquant que $e^{\frac{14i\pi}{9}} = e^{-\frac{4i\pi}{9}}$ et $e^{\frac{10i\pi}{9}} = e^{-\frac{8i\pi}{9}}$ on peut regrouper les irréductibles conjugués

$$P = (X - e^{\frac{2i\pi}{9}})(X - e^{-\frac{2i\pi}{9}})(X - e^{\frac{4i\pi}{9}})(X - e^{-\frac{4i\pi}{9}})(X - e^{\frac{8i\pi}{9}})(X - e^{-\frac{8i\pi}{9}})$$

et donc

$$P = (X^2 - 2\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)X + 1)(X^2 - 2\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right)X + 1)(X^2 - 2\cos\left(\frac{8\pi}{9}\right)X + 1)$$

5. (x, y, z) vérifient le système si et seulement si ce sont les 3 racines du polynôme $P = X^3 - 6X^2 + 3X + 10$. On remarque que $P(-1) = 0$ et la division euclidienne de P par $X + 1$ nous permet d'affirmer $P = (X + 1)(X^2 - 7X + 10)$. On a $\Delta = 49 - 40$ donc les 2 racines supplémentaires sont $\frac{7 \pm 3}{2}$ i.e. 5 et 2. Conclusion : $(-1, 2, 5)$ ainsi que tous les triplets obtenus en permutant ses 3 coordonnées forme l'ensemble des solutions
6. Soit $F = \frac{1}{X(X+1)(X+2)}$, cette fraction est irréductible de degré -3 (donc partie entière nulle) et a 3 pôles simples : 0, -1 et -2. Donc F admet une DES de la forme $F = \frac{a}{X} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{X+2}$. En multipliant par X et évaluant en 0 on trouve $a = \frac{1}{2}$; en multipliant par $X + 1$ et évaluant en -1 on trouve $b = -1$ enfin comme $xF(x) \rightarrow 0 = a + b + c$ en l'infini, on a $c = \frac{1}{2}$. Donc $S_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1/2}{k} - \frac{1/2}{k+1} - \frac{1/2}{k+1} + \frac{1/2}{k+2} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{2} \right)$

Exercice 1

1. (a) Soit z une racine de P . L'équation vérifiée par P s'écrit aussi $P((X+1)^2) = P(X)P(X+2)$, et donc $(z+1)^2$ est aussi racine de P . De même, $(z-1)^2$ est aussi racine de P . On va prouver qu'au moins un des deux nombres complexes $(z+1)^2$ ou $(z-1)^2$ est de module supérieur strict à z . En effet, $(z+1)^2 - (z-1)^2 = 4z$, et donc $4|z| \leq |z+1|^2 + |z-1|^2$. Ainsi, l'un de ces deux nombres complexes est de module supérieur ou égal à $2|z|$. Si $|z| \neq 0$, le résultat est prouvé. Sinon, si $z = 0$, le résultat est trivial.
- (b) Si P admet une racine (complexe), alors il en admet d'après la question précédente une infinité. C'est donc le polynôme nul. Les polynômes qui sont solutions de l'équation ne peuvent donc être que des polynômes constants, et les seuls polynômes constants solutions sont les polynômes $P(X) = 0$ et $P(X) = 1$.
2. (a) En raisonnant comme dans le premier cas, on voit que si z est racine de P , alors z^2 et $(z+1)^2$ sont aussi des racines de P . Par récurrence, z^{2^n} et $(z+1)^{2^n}$ seront racines pour tout entier n . Puisque le polynôme n'admet qu'un nombre fini de racines, les suites $(z^{2^n})_n$ et $((z+1)^{2^n})_n$ ne peuvent prendre qu'un nombre fini de valeurs. Le premier point nous dit qu'on a nécessairement $z = 0$ ou $|z| = 1$. On note Γ_1 cet ensemble. Le second point nous dit que $z = -1$ ou $|z+1| = 1$, ensemble que l'on note Γ_2 . Il est facile de vérifier (par exemple, en dessinant ses ensembles), que les points d'intersection de Γ_1 et Γ_2 sont $0, -1, j$ et j^2 . Mais si $z = 0$ est racine, alors $(z+1)^2 = 1$ est aussi racine, ce qui n'est pas possible. De même, si $z = -1$ est racine, alors $(z+1)^2 = 0$ est racine, ce qui n'est pas (plus) possible. Donc les seules racines de P sont j et j^2 .
- (b) Puisque P est à coefficients réels, j et j^2 , qui sont des complexes conjugués, doivent être des racines de même multiplicité. On doit donc avoir $P(X) = \lambda(X-j)^n(X-j^2)^n = \lambda(X^2+X+1)^n$. Par identification des coefficients dominants, on trouve $\lambda = 1$. Réciproquement, on vérifie facilement que les polynômes $P(X) = (X^2+X+1)^n$ sont solutions de l'équation.

Exercice 2

1. (a) $f(x)$ existe ssi $x^2 - 1 \neq 0$ donc $I =]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, +\infty[$.

D'après les théorèmes généraux f est continue et dérivable sur I .

- (b) Au voisinage de 1 et de -1 , $f(x) \sim \exp\left(\frac{x}{x^2-1}\right)$.

D'où : $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0$. f se prolonge donc par continuité à gauche en 1 et -1

et on pose $f_g(1) = 0$ et $f_g(-1) = 0$

- (c) Par contre f ne se prolonge pas par continuité en 1 et en -1 car :

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$$

- (d) Etude de la dérivabilité à gauche en -1 c'est-à-dire de $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x) - f_g(-1)}{x + 1}$

En écrivant $\frac{f(x)}{x+1} = x(x-1) \frac{x}{x^2-1} \exp\left(\frac{x}{x^2-1}\right)$, on obtient $\frac{f(x)}{x+1} \sim_{(-1)^-} 2 \frac{x}{x^2-1} \exp\left(\frac{x}{x^2-1}\right)$ d'où

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x) - f_g(-1)}{x + 1} = 0 \quad \text{car} \quad \lim_{u \rightarrow -\infty} u e^u = 0$$

f se prolonge donc en une fonction dérivable à gauche -1 et on pose $f'_g(-1) = 0$

En utilisant le même procédé on obtient le même équivalent en 1^- et donc f se prolonge donc en une fonction dérivable à gauche 1 et on pose $f'_g(1) = 0$

2. (a) D'après 1 (c), $\mathcal{C}_f$ présente deux branches infinies en -1^+ et en 1^+ . $\mathcal{C}_f$ admet donc deux asymptotes verticales dont les équations sont : $x = 1$ et $x = -1$.
 $f(x) \sim_{x \rightarrow +\infty} x^2$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$. $\mathcal{C}_f$ admet donc deux autres branches infinies.

De plus, $\frac{f(x)}{x} \sim_{\infty} x$ donc il s'agit de deux branches paraboliques de direction asymptotique (Oy) .

- (b) $\exp\left(\frac{x}{x^2-1}\right) = \exp\left(\frac{1}{x} \frac{1}{1-\frac{1}{x^2}}\right) = \exp\left(\frac{h}{1-h^2}\right)$ avec $h = \frac{1}{x}$
 $= \exp(h(1+h^2+o(h^2))) = \exp(h+h^3+o(h^3)) = \exp(X)$

avec $X = h+h^3+o(h^3)$, $X^2 = h^2+o(h^3)$ et $X^3 = h^3+o(h^3)$

Finalement, $\exp\left(\frac{h}{1-h^2}\right) = 1 + h + h^3 + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6} + o(h^3) = 1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{7h^3}{6} + o(h^3)$.

Donc : $\exp\left(\frac{x}{x^2-1}\right) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{7}{6x^3} + o_{\infty}\left(\frac{1}{x^3}\right)$

- (c) $f(x) = x^2 + x + \frac{1}{2} + \frac{7}{6x} + o_{\infty}\left(\frac{1}{x}\right)$ donc $f(x) - y \sim_{\infty} \frac{7}{6x}$: $(\mathcal{C}_f)$ admet (Γ) comme parabole asymptote en l'infini. Au voisinage de $+\infty$, $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de (Γ) alors qu'en $-\infty$ elle est en dessous.

De plus, $y = x^2 + x + \frac{1}{2} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$.

Si on pose $\Omega = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ et (X, Y) les coordonnées de M dans le repère $(\Omega; \vec{i}, \vec{j})$ alors

$\vec{\Omega M} = X \vec{i} + Y \vec{j} = \vec{\Omega O} + \vec{OM} = \left(x + \frac{1}{2}\right) \vec{i} + \left(y - \frac{1}{4}\right) \vec{j}$ soit

$M(X, Y) \in \mathcal{C}_f \iff Y^2 = X^2$ donc (Γ) est la parabole de sommet Ω et de paramètre $\frac{1}{2}$.

3. (a) $P(X) = X^2 \left(2 \left(X^2 + \frac{1}{X^2}\right) - \left(X + \frac{1}{X}\right) - 4\right)$.

En posant $T = X + \frac{1}{X}$ on en déduit que $P(X) = X^2 Q(T)$ avec $Q(T) = 2T^2 - T - 8$.

(b) $Q(t) = 0 \iff t = a = \frac{1 - \sqrt{65}}{4}$ ou $t = b = \frac{1 + \sqrt{65}}{4}$
 D'où, $P(x) = x^2 Q(t) = x^2(t - a)(t - b) = 2(x^2 - ax + 1)(x^2 - bx + 1)$
 $x^2 - ax + 1 > 0$ car $\Delta < 0$
 $x^2 - bx + 1 = 0 \iff x = \beta = \frac{b\sqrt{2} + \sqrt{b}}{2\sqrt{2}}$ ou $x = \alpha = \frac{b\sqrt{2} - \sqrt{b}}{2\sqrt{2}}$

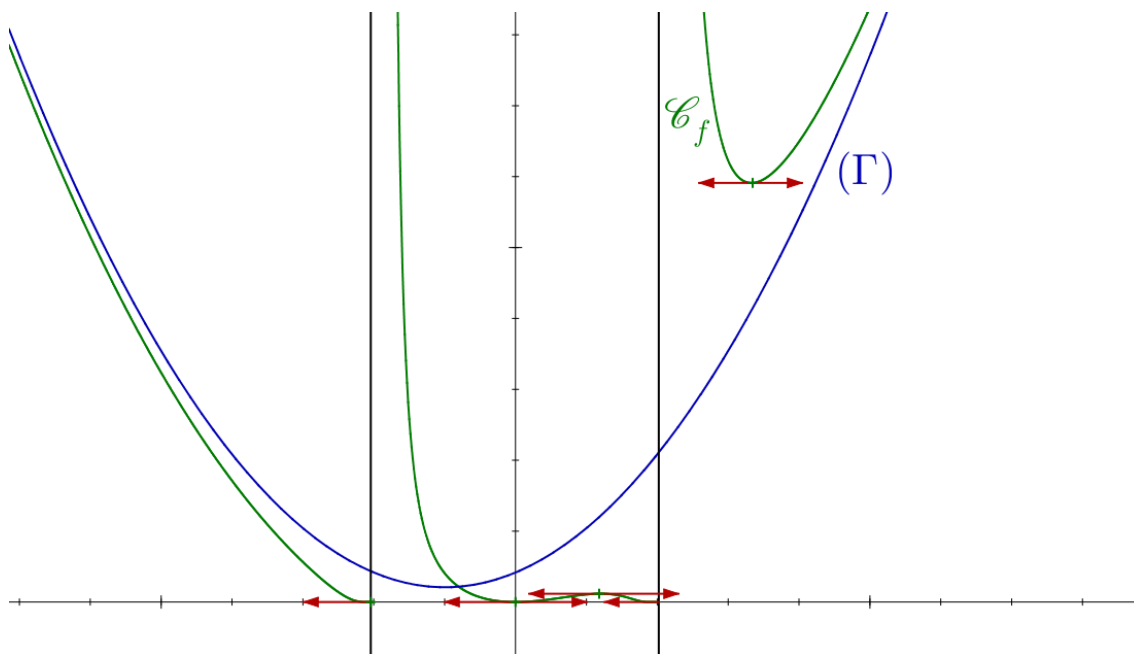
Conclusion : P admet deux racines réelles α et β .

(c) $\forall x \in I, f'(x) = \frac{xP(x)}{(x^2 - 1)^2} \exp\left(\frac{x}{x^2 - 1}\right)$ et $P(x) = 2(x^2 - ax + 1)(x - \alpha)(x - \beta)$

(d) Le signe de $f'(x)$ est celui de $xP(x)$.

x	$-\infty$		-1		0		α		1		β		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$	0	$+$	0	$-$		$+$	0	$+$	
	$+\infty$		$+\infty$				$f(\alpha)$		$+\infty$			$+\infty$	
$f(x)$					0		0		0		$f(\beta)$		

4. Tracé $\mathcal{C}_f$:



Problème**PREMIÈRE PARTIE**

$$1. A(x) = \int a(x) dx = \int \frac{2-x}{(1-x)^2} dx = \int \frac{1+1-x}{(1-x)^2} dx = \int \frac{dx}{(1-x)^2} + \int \frac{dx}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \ln|1-x|$$

$$\text{Or } x < 1 \text{ donc } A(x) = \frac{1}{1-x} - \ln(1-x)$$

$$2. \text{ Pour tout } x \in I, y'(x) - a(x)y(x) = 0 \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, y(x) = \lambda e^{A(x)}$$

$$\text{Donc } \forall x \in I, y(x) = \frac{\lambda}{1-x} e^{\frac{1}{1-x}}$$

$$3. \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3) \text{ d'où } e^{\frac{1}{1-x}} = e \times e^X \text{ avec } X = x + x^2 + x^3 + o(x^3)$$

$$\text{d'où, } X^2 = x^2 + 2x^3 + o(x^3) \text{ et } X^3 = x^3 + o(x^3)$$

$$\text{Donc } e^X = 1 + X + \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{6} + o(X^3) = 1 + x + \frac{3x^2}{2} + \frac{13x^3}{6} + o(x^3)$$

$$\text{Soit } f(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3))e \left(1 + x + \frac{3x^2}{2} + \frac{13x^3}{6} + o(x^3) \right)$$

$$\text{d'où } f(x) = e + 2ex + \frac{7ex^2}{2} + \frac{17ex^3}{3} + o(x^3)$$

DEUXIÈME PARTIE

$$4. \forall x \in I, f^{(0)}(x) = f(x) = \frac{1}{1-x} e^{\frac{1}{1-x}} = P_0 \left(\frac{1}{1-x} \right) e^{\frac{1}{1-x}} \text{ en posant } P_0 = X$$

Donc la propriété est vraie au rang 0.

Supposons-la vérifiée au rang n et montrons qu'elle l'est encore au rang $n+1$.

$$\forall x \in I, f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x) = \left[\frac{1}{(1-x)^2} P'_n \left(\frac{1}{1-x} \right) + \frac{1}{(1-x)^2} P_n \left(\frac{1}{1-x} \right) \right] e^{\frac{1}{1-x}}$$

d'après l'hypothèse de récurrence.

$$\text{Posons } P_{n+1} = X^2(P'_n + P_n), \text{ on vérifie bien alors que } \forall x \in I, f^{(n+1)}(x) = P_{n+1} \left(\frac{1}{1-x} \right) e^{\frac{1}{1-x}}$$

La propriété est donc vraie au rang $n+1$.

$$\text{Conclusion : } \forall x \in I, f^{(n)}(x) = P_n \left(\frac{1}{1-x} \right) e^{\frac{1}{1-x}}$$

$$5. \boxed{P_0 = X}. \text{ On obtient alors en utilisant la relation de récurrence } P_{n+1} = X^2(P'_n + P_n) \text{ que}$$

$$\boxed{P_1 = X^3 + X^2, P_2 = X^5 + 4X^4 + 2X^3 \text{ et } P_3 = X^7 + 9X^6 + 18X^5 + 6X^4}$$

$$6. \text{ D'après la formule de Leibniz, } \left[(1-x)^2 f'(x) \right]^{(n)} = [(2-x)f(x)]^{(n)} \text{ soit}$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left[(1-x)^2 \right]^{(k)} f^{(n-k+1)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (2-x)^{(k)} f^{(n-k)}(x)$$

$$\text{D'où, } \binom{n}{0} (1-x)^2 f^{(n+1)}(x) + \binom{n}{1} (-2)(1-x) f^{(n)}(x) + \binom{n}{2} 2 f^{(n-1)}(x)$$

$$= \binom{n}{0} (2-x) f^{(n)}(x) + \binom{n}{1} (-1) f^{(n-1)}(x)$$

soit en multipliant les deux membres par $e^{-\frac{1}{1-x}}$,
 $(1-x)^2 f^{(n+1)}(x) e^{-\frac{1}{1-x}} - 2n(1-x) f^{(n)}(x) e^{-\frac{1}{1-x}} + n(n-1) f^{(n-1)}(x) e^{-\frac{1}{1-x}}$
 $= (2-x) f^{(n)}(x) e^{-\frac{1}{1-x}} - n f^{(n-1)}(x) e^{-\frac{1}{1-x}}$

En divisant de part et d'autre par $\frac{1}{(1-x)^2}$ on obtient :

$$P_{n+1} \left(\frac{1}{1-x} \right) - \frac{2n}{1-x} P_n \left(\frac{1}{1-x} \right) + \frac{n^2}{(1-x)^2} P_{n-1} \left(\frac{1}{1-x} \right) = \frac{1+1-x}{(1-x)^2} P_n \left(\frac{1}{1-x} \right)$$

soit $P_{n+1}(X) - 2nX P_n(X) + n^2 X^2 P_{n-1}(X) = (X + X^2) P_n(X)$

d'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $P_{n+1}(X) = [(2n+1)X + X^2] P_n(X) - n^2 X^2 P_{n-1}(X)$

TROISIÈME PARTIE

7. Pour tout $x < 1$, $f^{(n)}(x) = P_n \left(\frac{1}{1-x} \right) e^{\frac{1}{1-x}}$ d'où $a_n = f^{(n)}(0) = P_n(1)e$

D'où, en évaluant en 1 la formule du 6., on obtient $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = (2n+2)a_n - n^2 a_{n-1}$

8. (a) $a_0 = P_0(1)e = e, a_1 = P_1(1)e = 2e, a_2 = P_2(1)e = 7e, a_3 = P_3(1)e = 34e$.

d'où, $a_4 = 8a_3 - 9a_2 = 209e$

(b) D'après la formule de Taylor-Young, on obtient :

$$f(x) = \sum_{k=0}^4 \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^4) = \sum_{k=0}^4 \frac{a_k}{k!} x^k + o(x^4)$$

$$\text{soit } f(x) = e + 2ex + \frac{7ex^2}{2} + \frac{17ex^3}{3} + \frac{209ex^4}{24} + o(x^4)$$

9. (a) $S_p(0) = \sum_{i=0}^p \frac{i!}{(i!)^2} = \sum_{i=0}^p \frac{1}{i!} = u_p$.

$$S_p(1) = \sum_{i=0}^p \frac{(i+1)!}{(i!)^2} = \sum_{i=1}^p \frac{i+1}{i!} = \sum_{i=0}^p \frac{i}{i!} + \sum_{i=0}^p \frac{1}{i!} = \sum_{i=1}^p \frac{1}{(i-1)!} + u_p = \sum_{j=0}^{p-1} \frac{1}{j!} + u_p = u_{p-1} + u_p \text{ en posant } j = i-1.$$

(b) On en déduit alors que $\lim_{p \rightarrow +\infty} S_p(0) = e$ et $\lim_{p \rightarrow +\infty} S_p(1) = \lim_{p \rightarrow +\infty} u_{p-1} + \lim_{p \rightarrow +\infty} u_p = 2e$

10. Pour tout $(p, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$,

$$S_p(n+1) - (2n+2)S_p(n) + n^2 S_p(n-1) = \sum_{i=0}^p \frac{1}{(i!)^2} [(n+1+i)! - (2n+2)(n+i)! + n^2(n-1+i)!]$$

$$= \sum_{i=0}^p \frac{1}{(i!)^2} (n-1+i)! [i^2 - (n+i)] = \sum_{i=0}^p \frac{i^2}{(i!)^2} (n-1+i)! - \sum_{i=0}^p \frac{1}{(i!)^2} (n+i)!$$

$$= \sum_{i=1}^p \frac{(n-1+i)!}{(i-1)!^2} - \sum_{i=0}^p \frac{(n+i)!}{(i!)^2} = \sum_{j=0}^{p-1} \frac{(n+j)!}{(j!)^2} - \sum_{i=0}^p \frac{(n+i)!}{(i!)^2} \text{ en posant } j = i-1.$$

$$\text{Donc } \forall (p, n) \in (\mathbb{N}^*)^2, S_p(n+1) - (2n+2)S_p(n) + n^2 S_p(n-1) = S_{p-1}(n) - S_p(n)$$

11. Montrons par récurrence double sur n que la suite $p \mapsto S_p(n)$ converge.

$(S_p(0))_p$ et $(S_p(1))_p$ convergent respectivement vers e et $2e$, donc la propriété est vraie aux rangs 0 et 1.

Supposons que $(S_p(n-1))_p$ et $(S_p(n))_p$ convergent et montrons que $(S_p(n+1))_p$ converge.

D'après l'hypothèse de récurrence $(S_p(n-1))_p$ et $(S_p(n))_p$ convergent donc $(S_{p-1}(n))_p$ converge vers la même limite que $(S_p(n))_p$. De plus $S_p(n+1) = (2n+2)S_p(n) - n^2 S_p(n-1) + S_{p-1}(n) - S_p(n)$, donc par comme de limites $(S_{p+1}(n))_p$ converge. La propriété est donc vraie au rang $p+1$.

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(S_p(n))_p$ converge

12. Soit ℓ_n la limite quand p tend vers $+\infty$ de la suite $(S_p(n))_p$.

On a donc $\ell_0 = e, \ell_1 = 2e$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ell_{n+1} = (2n+2)\ell_n - n^2\ell_{n-1}$.

Comme (ℓ_n) vérifie la même relation de récurrence que la suite (a_n) , on montre par une récurrence immédiate que

les deux suites sont égales, d'où $a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_p(n)$ soit $a_n = \lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^p \frac{(n+i)!}{(i!)^2}$.

De plus, $\frac{(n+i)!}{(i!)^2} = \frac{(n+i)!}{n!i!} \times \frac{n!}{i!} = n! \binom{n+i}{i} \frac{1}{i!}$

Conclusion :
$$a_n = \lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^p \frac{(n+i)!}{(i!)^2} = \lim_{p \rightarrow +\infty} n! \sum_{i=0}^p \binom{n+i}{i} \frac{1}{i!}$$