

ex7. TD 17.

$$h(x) = f(b) - f(x) - f'(x)(b-x) - \dots - \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n)}(x) - \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot A$$

On a $h(b) = f(b) - f(b) = 0$

et $h(a) = \left(f(b) - \sum_{k=0}^n f^{(k)}(a) \frac{(b-a)^k}{k!} \right) - A \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$

Choisissons A de sorte que $h(a) = 0$, i.e on choisit

A tel que $A \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} = f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)(b-a)^k}{k!}$

(il suffit de prendre $A = \frac{(n+1)!}{\underbrace{(b-a)^{n+1}}_{x_0}} \times (\dots)$)

Comme $h(a) = h(b)$ et h est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, $\exists c \in]a, b[$ / $h'(c) = 0$.

O, $\forall x \in]a, b[$ on a

$$h(x) = f(b) - f(x) - \sum_{k=1}^n f^{(k)}(x) \frac{(b-x)^k}{k!} - A \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}$$

donc $h'(x) = -f'(x) - \sum_{k=1}^n \left(f^{(k+1)}(x) \frac{(b-x)^k}{k!} - \underbrace{f^{(k)}(x) \frac{k(b-x)^{k-1}}{k!}}_{= f^{(k)}(x) \frac{(b-x)^{k-1}}{(k-1)!}} \right) + A \frac{(b-x)^n}{n!}$

somme télescopique valant

$$f^{(n+1)}(x) \frac{(b-x)^n}{n!} - f'(x) \frac{(b-x)^0}{0!}$$

d'où $h'(x) = -f^{(n+1)}(x) \frac{(b-x)^n}{n!} + A \frac{(b-x)^n}{n!}$

Ainsi on a : $\exists c \in]a, b[$

$$h'(c) = 0 \text{ i.e. } \left(f^{(n+1)}(c) - A \right) \times \frac{(b-c)^n}{n!} = 0$$

$$\text{i.e. } A = f^{(n+1)}(c)$$

$$\text{et donc } A \times \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

$$\text{Donc } f(h) - \sum_{k=0}^n f^{(k)}(a) \frac{(b-a)^k}{k!} = \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

$$\underline{\text{Conclusion}} : f(h) = \left(\sum_{k=0}^n f^{(k)}(a) \frac{(b-a)^k}{k!} \right) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$