Colle 22 : polynômes-fractions rationnelles-analyse asymptotique

Résultats et preuves à connaître

Proposition 1 Relations coefficients-racines (cas général)

Soit $P=\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme complexe de degré n ayant pour racines $\alpha_1,\dots\alpha_n$.
On pose $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $\sigma_k=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n} \alpha_{i_1}\dots\alpha_{i_k}$. Alors

$$P=a_n(X^n-\sigma_1X^{n-1}+\sigma_2X^{n-2}+\cdots+(-1)^n\sigma_n) \quad \text{et} \quad \sigma_k=(-1)^k\frac{a_{n-k}}{a_n}$$

Proposition 2 Propriété

$\forall (i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $L_i(x_j)=\delta_{ij}$: L_i admet $x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n$ comme racines et vaut 1 en x_i.

Proposition 3 Théorème (Polynôme d'interpolation de Lagrange de degré minimal)

On peut utiliser sans démonstration le résultat précédent Si $x_1,\dots,x_n$ sont des éléments distincts de $\mathbb{K}$ et $y_1,\dots,y_n$ des éléments de $\mathbb{K}$ alors il existe un unique $P\in\mathbb{K}_{n-1}[X]$ qui vérifie

$$\forall i\in[\![1,n]\!],\ P(x_i)=y_i$$

Il s'agit de $P=\sum_{i=1}^{n} y_iL_i$.

Proposition 4 Théorème (Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$)Sans démonstration

Si $F\in\mathbb{C}(X)$, on a $Q=\prod_{k=1}^{n}(X-\alpha_k)^{m_k}$ où les α_k sont les pôles de F d'ordre m_k. Alors il existe un unique polynôme E et une unique famille de complexes $(b_{kj})_{1\leqslant k\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant m_k}$ telle que

$$F=E+\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_k}\frac{b_{kj}}{(X-\alpha_k)^j}.$$

Proposition 5 Pôle simple

Soit a un pôle simple de F.
La partie polaire relative à a est $\dfrac{\alpha}{X-a}$ où $\alpha=[(X-a)F](a)$.

Proposition 6

Soit a un pôle simple de $F = \frac{P}{Q}$.

La partie polaire relative à a est $\dfrac{\alpha}{X-a}$ où $\alpha = \dfrac{P(a)}{Q'(a)}$.

Proposition 7 Théorème de décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$Sans démonstration

Si $F \in \mathbb{R}(X)$, on a $Q = \prod_{k=1}^{q}(X-\alpha_k)^{m_k}\prod_{k=1}^{r}(X^2+\beta_k X+\gamma_k)^{n_k}$ où les α_k sont les pôles réels de F d'ordre m_k et $\beta_k^2 - 4\gamma_k < 0$. Alors il existe un unique polynôme E et une unique famille de complexes $(b_{kj})_{1\leqslant k\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant m_k}$ telle que

$$F = E + \sum_{k=1}^{q}\sum_{j=1}^{m_k}\frac{a_{kj}}{(X-\alpha_k)^j} + \sum_{k=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_k}\frac{b_{kj}X+c_{kj}}{(X^2+\beta_k X+\gamma_k)^j}.$$

Définition 1 Notation o et O

Donner les définitions de $f(x) \underset{x\to a}{=} O(g(x))$ et $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$. Montrer que la deuxième proposition implique la première et donner un exemple où la première est vérifiée mais pas la deuxième.

Proposition 8 Conséquences (Opérations sur o)

- **Transitivité** : Si $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$ et $g(x) \underset{x\to a}{=} o(h(x))$ alors $f(x) \underset{x\to a}{=} o(h(x))$
- **Somme** : Si $f_1(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$ et $f_2(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$ alors $f_1(x)+f_2(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$ et $\lambda f_1(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.
- **Produit** : Si $f_1(x) \underset{x\to a}{=} o(g_1(x))$ et $f_2(x) \underset{x\to a}{=} o(g_2(x))$ alors $f_1(x)\times f_2(x) \underset{x\to a}{=} o(g_1(x)\times g_2(x))$.
- **Quotient** : Si $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$ et h non nulle au voisinage de a alors $f(x)/h(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x)/h(x))$

Proposition 9 Théorème (croissances comparées en $+\infty$)

- $x^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} o(x^\beta) \iff \alpha < \beta$
- $e^{ax} \underset{x\to+\infty}{=} o(e^{bx}) \iff a < b$
- Soient $a > 1, \alpha > 0, \beta > 0$

$$\ln^\beta(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(x^\alpha), \quad x^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} o(e^{ax})$$

À savoir faire

- ☐ Tous les exercices sur les polynômes
- ☐ Décomposer une fraction en éléments simples :
- ☐ Commencer par diviser le numérateur et le dénominateur par leur PGCD s'ils ne sont pas premiers entre eux. Faire la division euclidienne de P par Q pour identifier parties entières et polaires.
- ☐ Déterminer les pôles et leurs ordres.

- ☐ Donner la forme de la décomposition en éléments simples en laissant des coefficients indéterminés.
- ☐ Réduire le nombre de coefficients en exploitant les propriétés remarquables (parité, effet de la conjugaison, limite de $xF(x)$ en $+\infty$...).
- ☐ Appliquer la méthode de multiplication-évaluation (de préférence si Q est sous forme factorisée) ou la méthode "$P(a)/Q'(a)$" dite " de dérivation la tête en bas" s'il s'agit d'un pôle simple et que Q n'est pas sous forme factorisée.
- ☐ Déduire d'une décomposition en éléments simple de F sur $\mathbb{C}(X)$ une décomposition en éléments simples de F sur $\mathbb{R}(X)$.

Ce qu'en dit le programme

Polynômes et fractions rationnelles

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
f) Polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$	
Semaine précédente	
g) Formule d'interpolation de Lagrange	
Si $x_1,\dots,x_n$ sont des éléments distincts de $\mathbb{K}$ et $y_1,\dots,y_n$ des éléments de $\mathbb{K}$, il existe un unique polynôme $P\in\mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que $P(x_i)=y_i$ pour tout i.	Expression de P. Description des polynômes Q tels que $Q(x_i)=y_i$ pour tout i.
h) Fractions rationnelles	
Corps $\mathbb{K}(X)$. Forme irréductible d'une fraction rationnelle. Fonction rationnelle. Degré, partie entière, zéros et pôles, multiplicités.	La construction de $\mathbb{K}(X)$ est hors programme.
i) Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$	
Existence et unicité de la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$. Si λ est un pôle simple, coefficient de $\dfrac{1}{X-\lambda}$. Décomposition en éléments simples de $\dfrac{P'}{P}$.	La démonstration est hors programme. Toute technicité dans les exemples est exclue. Application au calcul de primitives, de dérivées k-ièmes.