Colle 21 : polynômes

Résultats et preuves à connaître

Définition 1 PGCD

Soient $(A,B) \in \mathbb{K}[X]^2$ avec $A \neq 0$ ou $B \neq 0$.
Il existe un unique polynôme unitaire D dont les diviseurs sont les diviseurs communs à A et B, c'est-à-dire

$$\forall P \in \mathbb{K}[X],\ P\,|\,A \quad \text{et} \quad P\,|\,B \Longleftrightarrow P\,|\,D$$

D est appelé pgcd de A et B et noté $A \wedge B$. C'est le polynôme unitaire associé au dernier reste non nul de l'algorithme d'Euclide.
On pose par convention : $0 \wedge 0 = 0$.

Proposition 1 Proposition (Calcul du PPCM et du PGCD)

Soient $(A,B) \in \mathbb{K}[X]^2$, non constants. Posons $A = \lambda \prod_{i=1}^{k} P_i^{\alpha_i}$ et $B = \mu \prod_{i=1}^{k} P_i^{\beta_i}$.

i) $A\,|\,B \Longleftrightarrow \forall i \in [\![1,k]\!],\ \alpha_i \leqslant \beta_i$

ii) $A \wedge B = \prod_{i=1}^{k} P_i^{\min(\alpha_i,\beta_i)}$ et $A \vee B = \prod_{i=1}^{k} P_i^{\max(\alpha_i,\beta_i)}$

On a donc $(A \vee B)(A \wedge B) = \dfrac{1}{\lambda\mu} AB$

Proposition 2 Lien entre racine et divisibilité

$P(\alpha) = 0 \Longleftrightarrow (X-\alpha)\,|\,P$

Proposition 3 Conséquence

Si $\alpha_1, \dots \alpha_n$ sont n racines distinctes de P alors $\prod_{i=1}^{n} (X-\alpha_i)\,|\,P$.

Proposition 4 Caractérisation 1 de la multiplicité d'une racine une propriété

α est une racine d'ordre k de P ssi il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$P = (X-\alpha)^k Q \quad \text{et} \quad Q(\alpha) \neq 0$$

(on part de la définition d'origine : la multiplicité est la plus grande valeur de k telle que $(X-\alpha)^k | P$)
Si α est racine d'ordre $k \geqslant 1$ de P alors α est racine d'ordre $k-1$ de P'.
Si α est racine d'ordre $k \geqslant n$ de P alors α est racine d'ordre $k-n$ de $P^{(n)}$.

Proposition 5 Caractérisation 2 de la multiplicité d'une racine

α est une racine d'ordre k de P ssi

$$P(\alpha) = P'(\alpha) = \cdots = P^{(k-1)}(\alpha) = 0 \quad \text{et} \quad P^{(k)}(\alpha) \neq 0.$$

Proposition 6 Formules de Taylor

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.

$$P = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(X-\alpha)^k}{k!} P^{(k)}(\alpha) \quad \text{et} \quad P(X+\alpha) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{X^k}{k!} P^{(k)}(\alpha).$$

Proposition 7 Décomposition sur $\mathbb{C}$

Tout polynôme non nul $P \in \mathbb{C}[X]$ s'écrit de manière unique sous la forme :

$$P = \lambda \prod_{k=1}^{q} (X-\alpha_k)^{m_k}$$

où $\alpha_1, \dots \alpha_q$ sont les racines distinctes de P respectivement d'ordre $m_1, m_2, \dots m_q$ et $\lambda \in \mathbb{C}^*$ est le coefficient dominant de P.

Proposition 8 Décomposition sur $\mathbb{R}$

Tout polynôme non nul $P \in \mathbb{R}[X]$ s'écrit sous la forme

$$P = \lambda \prod_{k=1}^{q} (X-\alpha_k)^{m_k} \prod_{k=1}^{r} (X^2+\beta_k X+\gamma_k)^{n_k}$$

où $\alpha_1, \dots \alpha_q$ sont les racines réelles distinctes de P respectivement d'ordre $m_1, m_2, \dots m_q$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$ est le coefficient dominant de P, et $\beta_k^2 - 4\gamma_k < 0$.

À savoir faire

- ☐ Tout sur l'arithmétique des entiers
- ☐ Poser une division euclidienne de polynômes
- ☐ Calculer un PGCD de deux polynômes (algorithme d'Euclide, si les polynômes se décomposent facilement en produit d'irréductibles, on utilise la proposition 3)
- ☐ Poser une division euclidienne de polynômes
- ☐ Pour une matrice A dont on observe un polynôme annulateur P, calculer les puissances de A en utilisant la division euclidienne de X^n par P
- ☐ Déterminer une CNS sur des coefficients d'un polynôme pour qu'il soit divisible par $X-\alpha$, ou encore par $(X-\alpha)^k$ ou bien $(X-\alpha)^k(X-\beta)^l$.
- ☐ Faire une division euclidienne d'un polynôme A de degré élevé (n) par un polynôme B de petit degré : utiliser le fait que le degré du reste est strictement inférieur à celui du diviseur, décrire ce reste à l'aide de quelques coefficients, qu'on peut ensuite déterminer en évaluant en les racines de B dans le cas où B a autant de racines distinctes que son degré, cela mène à un système linéaire possédant autant d'équations que d'inconnues.
  Si une racine est multiple, on dérive l'égalité $A = BQ + R$ autant de fois que nécessaire, et on l'évalue en cette racine pour obtenir une égalité supplémentaire.
- ☐ Pour un polynôme P et $\alpha \in \mathbb{K}$, déterminer si α est une racine simple, double, triple...

Ce qu'en dit le programme

Polynômes et fractions rationnelles

L'objectif de cette section est d'étudier les propriétés de base des polynômes et fractions rationnelles. Il s'agit d'objets particulièrement riches, dont l'étude interagit avec beaucoup de thèmes abordés pendant le semestre.

L'arithmétique de $\mathbb{K}[X]$ est développée selon le plan déjà utilisé pour l'arithmétique de $\mathbb{Z}$, ce qui autorise un exposé allégé. Le programme se limite au cas où le corps de base $\mathbb{K}$ est égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Anneau des polynômes à une indéterminée	
Anneau $\mathbb{K}[X]$. Degré, coefficient dominant, polynôme unitaire. Degré d'une somme, d'un produit. Composition.	La construction de $\mathbb{K}[X]$ est hors programme. Ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré au plus n. L'anneau $\mathbb{K}[X]$ est intègre.
b) Divisibilité et division euclidienne	
Divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$, diviseurs, multiples. Caractérisation des couples de polynômes associés.	
Théorème de la division euclidienne.	Algorithme de la division euclidienne.
c) Fonctions polynomiales et racines	
Fonction polynomiale associée à un polynôme. Racine (ou zéro) d'un polynôme, caractérisation en termes de divisibilité. Le nombre de racines d'un polynôme non nul est majoré par son degré. Multiplicité d'une racine.	Lien avec l'introduction aux équations algébriques de la section Nombres complexes. Méthode de Horner pour l'évaluation polynomiale. Détermination d'un polynôme par la fonction polynomiale associée.
Polynôme scindé. Relations entre coefficients et racines (formules de Viète).	Les formules concernant la somme et le produit doivent être connues des étudiants ; les autres doivent être retrouvées rapidement.
d) Dérivation	
Dérivée formelle d'un polynôme.	Pour $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, lien avec la dérivée de la fonction polynomiale associée.
Opérations sur les polynômes dérivés : combinaison linéaire, produit. Formule de Leibniz. Formule de Taylor polynomiale. Caractérisation de la multiplicité d'une racine par les polynômes dérivés successifs.	
e) Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$	
PGCD de deux polynômes dont l'un au moins est non nul.	Tout diviseur commun à A et B de degré maximal est appelé un PGCD de A et B.

Contenus	Capacités & Commentaires
Algorithme d'Euclide.	L'ensemble des diviseurs communs à A et B est égal à l'ensemble des diviseurs d'un de leurs PGCD. Tous les PGCD de A et B sont associés. Un seul est unitaire, on le note $A \wedge B$.
Relation de Bézout.	Détermination d'un couple de Bézout par l'algorithme d'Euclide étendu.
PPCM.	Notation $A \vee B$.
Couple de polynômes premiers entre eux. Théorème de Bézout. Lemme de Gauss.	Adaptation des résultats présentés lors de l'étude de l'arithmétique dans $\mathbb{Z}$.
PGCD d'un nombre fini de polynômes, relation de Bézout. Polynômes premiers entre eux dans leur ensemble, premiers entre eux deux à deux.	