

Montama Pargasser
Izèquel Gail
Leban Grippay

T.D 19 = Polynômes et fractions rationnelles

Exercice 9 =

Soit P_n le polynôme définie par: $P_n = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$, on veut montrer que:

P_n admet que des racines simples.

Supposons par l'absurde que: P_n admet au moins une racine double.
qu'on note: α . alors on a: $P(\alpha) = P'(\alpha) = 0$.

• D'après part on a:

$$P_n' = \sum_{k=1}^n \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} = P_{n-1} = \frac{x^n}{n!}$$

• Comme: $P_n' = P_{n-1} = \frac{x^n}{n!}$ on a: $P_n'(\alpha) = P_{n-1}(\alpha) = \frac{\alpha^n}{n!}$

D'où $\frac{\alpha^n}{n!} = 0$ soit $\alpha = 0$ ✓

• En évaluant P_n en α on a: $P_n(\alpha) = 1$.

Pour $\boxed{0 = 1}$ ce qui n'est pas! ✓

Donc P_n on l'admet que des racines simples. ✓