

TABEE
Jolan
ST-GERMAIN
Anne
POLIFRONI
Aubin

Exercice 18] Théorème chinois

Soient $(N_1, N_2) \in \mathbb{N}^2 / N_1 \wedge N_2 = 1$

et $(a_1, a_2) \in \mathbb{Z}^2$, $(S) : \begin{cases} x \equiv a_1 [N_1] \\ x \equiv a_2 [N_2] \end{cases}$

On veut montrer :

$\exists a \in \mathbb{Z} / (S) \Leftrightarrow x \equiv a [N_1 N_2]$

si $x \equiv a_1 [N_1]$ et $x \equiv a_2 [N_2]$, alors, $\exists (k, k') \in \mathbb{Z}^2 /$
 $x = a_1 + N_1 k$

Ainsi, $x - a_1 = N_1 k$

puisque $N_1 \wedge N_2 = 1$, alors, $\exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2$, donc,
 $u N_1 + v N_2 = 1$, d'où $u N_1 \equiv 1 [N_2] \checkmark$
 $\equiv 0 [N_2]$

$x \equiv a_2 [N_2]$

$\Leftrightarrow a_1 + N_1 k \equiv a_2 [N_2]$

On $\Leftrightarrow N_1 k \equiv a_2 - a_1 [N_2]$

$\Leftrightarrow k \equiv u(a_2 - a_1) [N_2] \checkmark$

Donc $x - a_1 = N_1 \times (u(a_2 - a_1)) + N_2 \times k'$

donc $x - a_1 = N_1 N_2 k' + N_1 u(a_2 - a_1)$

donc $x = N_1 N_2 k' + N_1 u(a_2 - a_1) + a_1$

i.e. $x \equiv \underbrace{(N_1 u(a_2 - a_1) + a_1)}_{=: a} [N_1 N_2]$

Or $k \equiv u(a_2 - a_1) [N_2]$

$\rightarrow k = u(a_2 - a_1) + N_2 p$

$x - a_1 = N_1 (u(a_2 - a_1) + N_2 p)$

donc $x = \underbrace{N_1 (u(a_2 - a_1) + N_2 p)}_{=: a_1}$

* En choisissant cette valeur de a , on a

② $10 \wedge 13 = 1$, on a $13 = 10 + 3 \rightarrow 13 - 10 = 3$

$10 = 3 \times 3 + 1 \rightarrow 1 = 10 - 3 \times 3$

$3 = 1 \times 3 + 0$ i.e. $1 = 4 \times 10 - 3 \times 13$

On choisit $u = 4 \rightarrow 4 \times 10 \equiv 1 [13]$.

On trouve $a = 10 \times 4 (5 - 2) + 2$

$= 3 \times 40 + 2 = 122$

$\Rightarrow x \equiv 122 [130]$

Oui ou -8 aussi.