

DM . 6

I. Somme des diviseurs

- 1) Le seul diviseur positif de 1 est 1 donc $\sigma(1) = 1$
Les seuls _____ de 2 sont 1 et 2 donc $\sigma(2) = 3$
Les seuls _____ de 3 sont 1 et 3 donc $\sigma(3) = 4$

- 2) Si n est composé, il existe deux entiers différents de 1 et n tels que $n = ab$.
Au moins l'un des 2 est supérieur à $\sqrt{n}$,
car sinon, les 2 seraient $< \sqrt{n}$ donc le produit ab serait inférieur strictement à n : cela serait absurde.

Donc n admet comme diviseurs :

1, n et au moins un autre entier $\geq \sqrt{n}$.

Donc $\sigma(n) \geq 1 + n + \sqrt{n}$ donc $\boxed{\sigma(n) > n + \sqrt{n}}$

Réciproquement : Si $\sigma(n) > n + \sqrt{n} > n + 1$ alors il est impossible que ses seuls diviseurs positifs soient 1 et n

(Sinon, on aurait $\sigma(n) = n + 1$) donc $\boxed{\sigma(n) > n + \sqrt{n}}$

Conclusion $\forall n \in \mathbb{N} / n \geq 2$, on a

$$(n \text{ est composé}) \Leftrightarrow (\sigma(n) > n + \sqrt{n})$$

- 3) Si $n = p^{\alpha}$ alors l'ensemble de ses diviseurs positifs est $D(n) = \{1, p, p^2, \dots, p^{\alpha}\}$

Donc
$$\sigma(n) = \sum_{k=0}^{\alpha} p^k = \frac{p^{\alpha+1} - 1}{p - 1}$$

4.a) Si $n = \prod_{i=1}^k p_i^{\alpha_i}$ alors les diviseurs de n sont les entiers de la forme

$$d = \prod_{i=1}^k p_i^{\beta_i} \text{ avec } 0 \leq \beta_1 \leq \alpha_1, 0 \leq \beta_2 \leq \alpha_2, \dots, 0 \leq \beta_k \leq \alpha_k.$$

b) On a donc

$$\begin{aligned} \sigma(n) &= \sum_{\beta_1=0}^{\alpha_1} \sum_{\beta_2=0}^{\alpha_2} \dots \sum_{\beta_k=0}^{\alpha_k} (p_1^{\beta_1} \times \dots \times p_k^{\beta_k}) \\ &= \left(\sum_{\beta_1=0}^{\alpha_1} p_1^{\beta_1} \right) \times \left(\sum_{\beta_2=0}^{\alpha_2} p_2^{\beta_2} \right) \times \dots \times \left(\sum_{\beta_k=0}^{\alpha_k} p_k^{\beta_k} \right) \\ &= \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \times \dots \times \frac{p_k^{\alpha_k+1} - 1}{p_k - 1} \\ &= \prod_{i=1}^k \frac{p_i^{\alpha_i+1} - 1}{p_i - 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) \sigma(10!) &= \sigma(2 \times 3 \times (2^3) \times 5 \times (2 \times 3) \times 7 \times (2^3) \times 3^2 \times (2 \times 5)) \\ &= \sigma(2^8 \times 3^4 \times 5^2 \times 7) \\ &= \frac{2^9 - 1}{2 - 1} \times \frac{3^5 - 1}{3 - 1} \times \frac{5^3 - 1}{5 - 1} \times \frac{7^2 - 1}{7 - 1} \\ &= \frac{(2^9 - 1) \times (3^5 - 1) \times (5^3 - 1) \times 48}{2 \times 4 \times 6} = \dots \end{aligned}$$

5] Si $m \wedge n = 1$ alors les décompositions en facteurs premiers de m et de n font intervenir des nb. premiers distincts.

Ainsi on peut écrire

$$n = \prod_{i=1}^k p_i^{d_i}$$

$$m = \prod_{i=k+1}^r p_i^{d_i}$$

où $p_1, \dots, p_r$ sont 2-à-2 distincts

On a alors $n \times m = \prod_{i=1}^r p_i^{d_i}$

Donc $\sigma(nm) = \prod_{i=1}^r \frac{p_i^{d_i+1} - 1}{p_i - 1}$

$$= \left(\prod_{i=1}^k \frac{p_i^{d_i+1} - 1}{p_i - 1} \right) \times \left(\prod_{i=k+1}^r \frac{p_i^{d_i+1} - 1}{p_i - 1} \right)$$

$$= \sigma(n) \times \sigma(m)$$

6] $\frac{\sigma(n)}{n} = \sum_{d|n} \frac{d}{n} = \sum_{d|n} \frac{1}{\frac{n}{d}}$

Or $\Phi : \begin{cases} D(n) \rightarrow D(n) \\ d \mapsto \frac{n}{d} \end{cases}$ est une bijection

de l'ensemble des diviseurs positifs de n (c'est en effet une involution donc une bijection).

Donc $\sum_{d|n} \frac{1}{\frac{n}{d}} = \sum_{d|n} \frac{1}{\Phi(d)} = \sum_{d'|n} \frac{1}{d'}$

Ce qui prouve : $\frac{\sigma(n)}{n} = \sum_{d|n} \frac{1}{d}$

3

2. Nombres parfaits pairs

1) $\sigma(n)$ est la somme de tous les diviseurs, i.e la somme des diviseurs stricts et de n .

Donc n est parfait $\Leftrightarrow$ (la somme des diviseurs stricts de n)
vaut n

$\Leftrightarrow$ la somme de tous les diviseurs
vaut $2n$

$$\Leftrightarrow \boxed{\sigma(n) = 2n}$$

2] Si $2^p - 1$ est premier, d'après 4.b on a

$$\boxed{\sigma(n) = \sigma(2^{p-1} \times (2^p - 1))} = \frac{2^p - 1}{2 - 1} \times \frac{(2^p - 1)^2 - 1}{(2^p - 1) - 1}$$

Décomposition
en facteurs premiers

$$= (2^p - 1) \times \frac{(2^p - 1 - 1)(2^p - 1 + 1)}{2^p - 1 - 1}$$

$$= (2^p - 1) (2^p)$$

$$= 2 \times 2^{p-1} \times (2^p - 1) = \boxed{2n}$$

donc n est parfait

De plus comme $p-1 \geq 1$ $\left(\begin{array}{l} p \neq 0 \text{ car sinon } 2^p - 1 = 0 \\ p \neq 1 \text{ car sinon } 2^p - 1 = 1 \end{array} \right\}$ pas premier

la valuation 2-adique est ≥ 1 donc n est pair :

3) a) Comme m est impair, il n'a aucun facteur premier en commun avec 2^{p-1} donc

$$m \wedge 2^{p-1} = 1$$

D'après I.5 on a alors

$$\begin{aligned}\sigma(n) &= \sigma(2^{p-1}m) = \sigma(2^{p-1}) \times \sigma(m) \\ &= \frac{2^p - 1}{2 - 1} \times \sigma(m) \\ &= \boxed{(2^p - 1) \sigma(m)}\end{aligned}$$

Par ailleurs comme n est pair on a aussi

$$\sigma(n) = 2n = \boxed{2^p m}$$

$$\text{Donc } 2^p m = (2^p - 1) \sigma(m)$$

On a donc $(2^p - 1) \mid 2^p m$ or $(2^p - 1) \wedge 2^p = 1$ (car il est impair)

donc d'après le théorème de Gauss

$$2^p - 1 \mid m, \text{ i.e. } \exists l \in \mathbb{N}$$

$$m = (2^p - 1)l$$

$$\text{b) On a } 2^p \overbrace{m}^{\parallel} = (2^p - 1) \sigma(m)$$

$$\text{i.e. } 2^p \times \overbrace{(2^p - 1)l}^{\parallel} = (2^p - 1) \sigma(m)$$

$$\text{D'où } 2^p l = \sigma(m)$$

$$\text{Or } m + l = (2^p - 1)l + l = 2^p l \text{ donc finalement } \boxed{m + l = \sigma(m)}$$

Comme $m = (2^l - 1)l$ et que $l \geq 2$ on a

$(2^l - 1) \geq 3$ (c'est donc un diviseur de $m \neq 1$)

donc si l est aussi différent de 1, on a

2 diviseurs stricts (qui éventuellement sont le même nombre)

de m : l serait dans ce cas un diviseur

de m autre que 1 et m , i.e

$$D(m) \supset \{1, m, l\}.$$

ainsi $\sigma(m) \geq 1 + m + l$ ce qui

serait absurde.

Conclusion: l'hypothèse " $l > 1$ " est absurde, donc

$l = 1$ (car l est un entier non-nul).

et donc $m = 2^l - 1$, i.e $n = 2^l \times (2^l - 1)$

Donc les seuls nombres parfaits et pairs sont
tous de la forme $2^l \times (2^l - 1)$

3] Approximation de $\sqrt{2}$

$$\begin{aligned} \text{1] On a } f(\sqrt{2}) &= \sqrt{2} \Leftrightarrow a\sqrt{2} + b + \frac{c}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \\ &\Leftrightarrow a\sqrt{2} + \frac{c\sqrt{2}}{2} + b = \sqrt{2} \\ &\Leftrightarrow (a + \frac{c}{2})\sqrt{2} + b = \sqrt{2} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a + \frac{c}{2} = 1 \\ b = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

La condition $\begin{cases} a + \frac{c}{2} = 1 \\ b = 0 \end{cases}$ est donc suffisante pour

que $\sqrt{2}$ soit un point fixe de f .

2] f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$,

$$f'(x) = a - \frac{c}{x^2} \text{ donc}$$

$$f'(\sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow a - \frac{c}{2} = 0$$

Si l'on ajoute cette condition à la précédente,

on obtient

$$\begin{cases} a - \frac{c}{2} = 0 \\ a + \frac{c}{2} = 1 \\ b = 0 \end{cases} \xLeftrightarrow L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \begin{cases} a - \frac{c}{2} = 0 \\ c = 1 \\ b = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ c = 1 \\ b = 0 \end{cases}$$

Donc la fonction $f: x \mapsto \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$ convient parfaitement

3] On a $u_0 = 1$,

$$\bullet \underline{u_1} = f(u_0) = f(1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{1} = \underline{\frac{3}{2}}.$$

$$\bullet \underline{u_2} = f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{4} + \frac{2}{3} = \frac{3^2 + 2 \times 4}{12} = \underline{\frac{17}{12}}$$

$$\bullet \underline{u_3} = f\left(\frac{17}{12}\right) = \frac{17}{24} + \frac{12}{17} = \frac{17^2 + 12 \times 24}{24 \times 17} = \underline{\frac{577}{408}}$$

Remarque $\frac{577}{408} \approx 1,414216$

or $\sqrt{2} = 1,414214$ donc le terme u_3 est déjà une bonne approximation de $\sqrt{2}$ (erreur $\approx 2 \times 10^{-6}$)

4] On a vu que $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2}$.

$$\text{Donc } f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \geq \frac{1}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow 2 \leq x^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} \leq x \quad (\text{car } x \in \mathbb{R}^{+*}).$$

Donc f décroît sur $]0; \sqrt{2}]$ et croît sur $[\sqrt{2}; +\infty[$.
elle admet un minimum en $\sqrt{2}$ qui est $\sqrt{2}$.

$$\text{Ainsi } \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \boxed{f(x) \geq \sqrt{2}}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, on définit $P(n)$: " $u_n \geq \sqrt{2}$ "

Initialisation: on a $u_1 = \frac{3}{2} \geq \sqrt{2}$ ce qui prouve $P(1)$

Hérédité: soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons $P(n)$ alors $u_n \geq \sqrt{2}$
donc $f(u_n) \geq \sqrt{2}$ i.e. $u_{n+1} \geq \sqrt{2}$: cela prouve $P(n+1)$ 8

Conclusion: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq \sqrt{2}$.

5] On s'intéresse au signe de f -isl :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad (f(x) - x \geq 0) \Leftrightarrow \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{x} - x \geq 0 \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} \geq \frac{x}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2 \geq x^2 \quad \left(\begin{array}{l} \text{en multipliant par} \\ 2x > 0 \end{array} \right)$$

$$\Leftrightarrow x \leq \sqrt{2} \quad (\text{car } x > 0).$$

Donc $\forall x \in [\sqrt{2}, +\infty[$ on a $f(x) - x \leq 0$
i.e $f(x) \leq x$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, comme $u_n \geq \sqrt{2}$, on a

$$f(u_n) \leq u_n \quad \text{i.e} \quad \boxed{u_{n+1} \leq u_n}$$

Conclusion: $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

6] Comme $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est minorée par $\sqrt{2}$ et décroissante, elle converge. Sa limite est un point fixe de f

$$\text{or} \quad f(x) = x \Leftrightarrow \frac{x}{2} + \frac{1}{x} = x \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{x}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2 = x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}.$$

Comme $\sqrt{2}$ est l'unique point fixe de f , on a

$$\boxed{u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sqrt{2}}$$

7 On cherche à majorer $|f'|$ sur $[1, \frac{3}{2}]$
 pour pouvoir appliquer l'I.A.F. pour cela on
 étudie les variations de f' :

$$\forall x \in [1, \frac{3}{2}], \quad f''(x) = \frac{2}{x^3} \geq 0$$

Donc

x	1	$\frac{3}{2}$
$f''(x)$	+	
f'	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{18}$

$$f'(1) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

$$f'(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{(\frac{3}{2})^2} = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{9-8}{18} = \frac{1}{18}$$

Ainsi $\forall x \in [1, \frac{3}{2}]$ on a $-\frac{1}{2} \leq f'(x) \leq \frac{1}{18} \leq \frac{1}{2}$

donc $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

Comme tous les termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$
 sont compris entre 1 et $\frac{3}{2}$ on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \sqrt{2}| = |f(u_n) - f(\sqrt{2})| \leq \frac{1}{2} |u_n - \sqrt{2}|$$

↑
D'après l'I.A.F.
sur l'intervalle $[\sqrt{2}; u_n]$

Ce qui donne $\epsilon_{n+1} \leq \frac{1}{2} \epsilon_n$

donc par récurrence $\epsilon_n \leq \frac{1}{2^n} \epsilon_0$

Or $\epsilon_0 = |\sqrt{2} - 1| \leq 1$

Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N},$$

$$\varepsilon_n \leq \frac{1}{2^n}.$$

8] Si l'on souhaite une approximation avec n décimales, il faut trouver un terme u_k pour lequel

$$|u_k - \sqrt{2}| \leq 10^{-n} \text{ or cela est garanti dès que } \frac{1}{2^k} \leq 10^{-n}$$

$$\Leftrightarrow k \ln\left(\frac{1}{2}\right) \leq -n \ln(10)$$

$$\Leftrightarrow k \geq n \frac{\ln(10)}{\ln(2)}$$

On peut donc faire $\left\lceil \frac{n \ln(10)}{\ln(2)} \right\rceil$ étapes et

ainsi obtenir une approximation à n décimales de $\sqrt{2}$.

9] $\forall n \in \mathbb{N}$, on définit $\mathcal{H}(n)$: " $u_n \in \mathbb{Q}$ "

Initialisation $u_0 = 1 \in \mathbb{Q}$ ce qui prouve $\mathcal{H}(0)$

Hérédité soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose $\mathcal{H}(n)$, alors $u_n \in \mathbb{Q}$

$$\text{i.e. } \exists (p_n, q_n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* / u_n = \frac{p_n}{q_n}.$$

$$\text{Donc } u_{n+1} = f(u_n) = \frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n} = \frac{p_n}{2q_n} + \frac{q_n}{p_n}$$

$$\text{i.e. } u_{n+1} = \frac{p_n^2 + 2p_n q_n}{2p_n q_n}$$

$$\text{En posant } p_{n+1} := p_n^2 + 2p_n q_n \in \mathbb{Z}$$

$$q_{n+1} := 2p_n q_n \in \mathbb{N}^*$$

On a bien $u_{n+1} = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ alors $u_{n+1} \in \mathbb{Q}$ ce qui prouve $\mathcal{H}(n+1)$ [1]

$$p = 1$$

$$q = 1$$

$$n = 0$$

for k in range (n) :

$$C_{p,q} = (p^2 + 2 * p * q, 2 * p * q)$$