

DM n°6.

1 Sommes des diviseurs

Pour tout entier naturel non nul n , on note $\sigma(n)$ la somme des diviseurs de n .

1. Calculer $\sigma(1)$, $\sigma(2)$ et $\sigma(3)$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Montrer que n est composé, c'est-à-dire $\exists(a, b) \in \mathbb{N}^2$, $1 < a \leq b$, tels que $n = ab$ si et seulement si $\sigma(n) > n + \sqrt{n}$.
3. Supposons que $n = p^\alpha$ avec p nombre premier. Montrer que $\sigma(n) = \frac{p^{\alpha+1} - 1}{p - 1}$.
4. Supposons maintenant que n se décompose en produit de facteurs premiers sous la forme $n = \prod_{i=1}^k p_i^{\alpha_i}$.
 - (a) Donner l'expression générale d'un diviseur d de n .
 - (b) En déduire que $\sigma(n) = \prod_{i=1}^k \left(\frac{p_i^{\alpha_i+1} - 1}{p_i - 1} \right)$.
 - (c) Calculer $\sigma(10!)$.
5. En déduire que si $m \wedge n = 1$ alors $\sigma(mn) = \sigma(m)\sigma(n)$: σ est une fonction arithmétique multiplicative.
6. Montrer que $\frac{\sigma(n)}{n} = \sum_{d|n} \frac{1}{d}$.

2 Nombres parfaits pairs

On dit qu'un entier naturel non nul n est parfait s'il est égal à la somme de ses diviseurs stricts (autres que lui-même).

1. Montrer que n est parfait ssi $\sigma(n) = 2n$. En déduire que 28 est parfait.
2. Montrer que si $2^p - 1$ est un nombre premier alors $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$ est parfait et pair.
3. Réciproquement, on suppose que n est parfait et pair.
 - (a) Supposons qu'il existe $p \geq 2$ et m impair tel que $n = 2^{p-1}m$. Calculer de deux manières $\sigma(n)$ puis en déduire qu'il existe $\ell \geq 1$ tel que $m = (2^p - 1)\ell$.
 - (b) Montrer que $\sigma(m) = m + \ell$ puis aboutir à une contradiction si $\ell > 1$. Conclure.

On ne connaît aucun nombre parfait et impair, on ne sait même pas s'il y en a. On sait cependant que s'il en existe, ils ont au moins 300 chiffres ...

3 Approximation de $\sqrt{2}$ par une suite récurrente

Dans cette partie, on cherche à approximer $\sqrt{2}$ en utilisant une suite définie par une relation de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$, où f ne fera pas intervenir de fonctions racines (sinon, à quoi bon s'embêter !) mais uniquement des opérations faisables avec un papier et un crayon.

On cherche une fonction de la forme $x \mapsto ax + b + \frac{c}{x}$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{Q}^3$ dont $\sqrt{2}$ serait un point fixe.

1. Déterminer une condition suffisante sur $(a, b, c) \in \mathbb{Q}^3$ pour que $\sqrt{2}$ soit un point fixe de la fonction f .
2. Déterminer une condition suffisante sur $(a, b, c) \in \mathbb{Q}^3$ pour avoir, de plus, $f'(\sqrt{2}) = 0$. On considère à présent cette fonction f . On définit la suite u définie par

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n).$$

3. Calculer u_1, u_2, u_3 .
4. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n \geq \sqrt{2}$.
5. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.
6. En déduire qu'elle converge et préciser sa limite.
7. Montrer qu'il existe $k \in [0, 1[$ tel que pour tout entier n , $|u_{n+1} - \sqrt{2}| \leq k|u_n - \sqrt{2}|$. On pose $\varepsilon_n = |u_n - \sqrt{2}|$. Donner une majoration de ε_n .
8. Combien faut-il faire d'étapes pour obtenir une approximation de $\sqrt{2}$ avec n décimales en suivant ce procédé ? (on demande une valeur minimale et non la valeur exacte).
9. Montrer que pour tout entier n , $u_n \in \mathbb{Q}$ et s'écrit sous la forme $\frac{p_n}{q_n}$. On propose l'algorithme suivant afin qu'il calcule p_{10} et q_{10}

```
p=1
q=1
n=___
for k in range(n):
    (p, q) = (_____, _____)
```