

BERTHELOT

Mathilde

HOAREAU

Samia

TD 18: Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

Ex 7:

a) $221x + 247y = 15$

$221 \wedge 247 = 13 \nmid 15$ donc

il n'y a pas de solutions dans $\mathbb{Z}$

ie $S = \emptyset$ ✓

$247 = 221 + 26$

$221 = 26 \times 8 + 13$

$26 = 2 \times 13 + 0$

$$\begin{array}{r} 26 \\ \times 8 \\ \hline 208 \end{array}$$

b) $198x + 216y = 36$

$198 \wedge 216 = 18 \mid 36$ donc

l'équation admet des solutions dans $\mathbb{Z}$.donc $(-2, 2)$ est une solution particulière. ✓

On cherche donc une solution générale:

$\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2, 198x + 216y = 36 \Leftrightarrow 198x + 216y = 2 \times 216 - 2 \times 198$

$\Leftrightarrow 198(x+2) = 216(-y+2)$

$\Leftrightarrow 11(x+2) = 12(-y+2)$

$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \begin{cases} x+2 = 12k \\ -y+2 = 11k \end{cases}$

$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \begin{cases} x = 12k - 2 \\ y = -11k + 2 \end{cases}$

$Y = \{ (12k-2, -11k+2), k \in \mathbb{Z} \}$ ✓

c) $323x - 391y = 612$

$323 \wedge 391 = 17$

et $612 = 17 \times 36$ donc $17 \mid 612$

donc l'équation admet des

solutions dans $\mathbb{Z}$ donc $(-216, -180)$ est une solution particulière. ✓

On cherche donc une solution générale

$\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2, 323x - 391y = 612 \Leftrightarrow 323x - 391y = 180 \times 391 - 216 \times 323$

$\Leftrightarrow 323(x+216) = 391(y+180)$ ✓

$\Leftrightarrow 19(x+216) = 23(y+180)$ ✓

$391 = 323 + 68$

$68 = 391 - 323$

$323 = 68 \times 4 + 51$

$51 = 323 - 4(391 - 323)$

$68 = 51 \times 1 + 17$

$17 = 391 - 323 - 323 + 4(391 - 323)$

$51 = 17 \times 3 + 0$

$17 = 5 \times 391 - 6 \times 323$ ✓

$\times 36 \begin{cases} 612 = 180 \times 391 - 216 \times 323 \end{cases}$

$$\begin{array}{r} 68 \\ \times 4 \\ \hline 272 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 17 \\ \times 3 \\ \hline 51 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 612 \\ - 51 \\ \hline 102 \\ - 102 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \quad / \quad \begin{cases} y + 180 = 19k \\ x + 216 = 23k \end{cases} \quad /$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \quad / \quad \begin{cases} y = 19k - 180 \\ x = 23k - 216 \end{cases} \quad /$$

$$Y = \{(23k - 216, 19k - 180), k \in \mathbb{Z}\} \quad \checkmark$$