

Fournier
Yonnick
Gronolin

MPSI

Gabriel William
Cadet Maël
Benoît Mathis Jack

Exercice 2

Soit $k \in \mathbb{N}$

$$k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3 = k^3 + k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + k^3 + 6k^2 + 12k + 8 \\ = 3k^3 + 9k^2 + 15k + 9 \quad \checkmark \quad (\text{divisible par } 9)$$

Intéressons nous à la divisibilité ^{par 3} de $3k^3 + 15k$:

$$= 3(k^3 + 5k)$$

Alors $3 \mid k^3 + 5k$: $k \equiv 1(3)$ alors c'est vrai.

$k^3 \equiv 1(3)$ et $5k \equiv 2(3)$ la somme des 2 est modulo 3 donc vrai.

$k \equiv 2(3)$ alors c'est vrai.

$k^3 \equiv 2(3)$ et $5k \equiv 1(3)$ la somme des 2 est modulo 3 donc vrai.

$k \equiv 0(3)$ alors c'est vrai.

Ce qui prouve que la somme de 3 entiers consécutifs donne un cube multiple de 9.