

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que n est le carré d'un entier a et le cube d'un entier b .

$$\begin{aligned} \text{On a } n &= \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{v_p(n)} \\ &\parallel \\ a^2 &= \left(\prod_{p \in \mathcal{P}} p^{v_p(a)} \right)^2 = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{2v_p(a)} \quad \text{donc } \forall p \in \mathcal{P}, \\ &\quad v_p(n) = 2v_p(a) \\ &\quad \text{i.e. } 2 \mid v_p(n). \end{aligned}$$

$$\text{On a aussi: } n = b^3 \quad \text{donc } \forall p \in \mathcal{P}, \text{ on a } v_p(n) = 3v_p(b) \\ \text{donc } 3 \mid v_p(n)$$

Finalement, comme $2 \wedge 3 = 1$ et tous deux divisent $v_p(n)$,
on a: $6 \mid v_p(n)$.

$$\text{donc } \forall p \in \mathcal{P}, \exists \alpha_p \in \mathbb{N} / v_p(n) = 6\alpha_p.$$

$$\text{Ainsi } n = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{v_p(n)} = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{6\alpha_p} = \left(\prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\alpha_p} \right)^6$$

$$\text{Notons } c := \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\alpha_p}. \quad \text{On a } c \in \mathbb{N} \text{ et}$$

$$n = c^6. \quad \text{Donc } n = (c^2)^3 : \text{ c'est bien le cube d'un carré.}$$

$$= (c^3)^2 : \text{ c'est aussi le carré d'un cube.}$$