

TABLE

Johar

MPSI

TD n°17: Dérivation

Exercice 6] polynômes de Hermite

SAINT-GERMAIN $\forall n \in \mathbb{R}$, $H_n(x) = e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} [e^{-x^2}]$ } polynôme d'Hermite d'ordre n .

Avec

① Si $f(x) = e^{-x^2} \forall x \in \mathbb{R}$, on a alors:

$$f'(x) = -2xe^{-x^2} \quad f''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1)$$

 $x \neq 0$ On a ainsi $y' + 2xy = 0$ l'équation différentielle dont une solution particulière est $f(x)$.② On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $H_n(x) = e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} [e^{-x^2}]$

$$H_{n+1}(x) = e^{x^2} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} [e^{-x^2}] = e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} [-2xe^{-x^2}]$$

$$= e^{x^2} x \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{d^k}{dx^k} [2x] \times \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} [e^{-x^2}]$$

← 2 termes, les autres étant nuls, on calcule juste pour $k=0$ et $k=1$

$$= -e^{x^2} x \left(1 \times 2x \frac{d^n}{dx^n} [e^{-x^2}] + 2nx \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} [e^{-x^2}] \right)$$

$$= -2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$$

$$\text{i.e. } H_{n+1}(x) + 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow H_{n+2}(x) + 2xH_{n+1}(x) + 2(n+1)H_n(x) = 0$$

$$\rightarrow H_{n+2} = -2xH_{n+1} + 2(n+1)H_n$$

$$\textcircled{3} H_0 = e^{x^2} \times e^{-x^2} = 1, H_1 = e^{x^2} (-2xe^{-x^2}) = -2x$$

$$H_2 = e^{x^2} (-2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2}) = -2 + 4x^2$$

Conjecturons: on remarque que H_0 , tout comme H_1 et H_2 sont des polynômes d'un ordre différent.

$$\text{Or, } \forall n \in \mathbb{N}, H_{n+2}(x) = -2xH_{n+1}(x) + 2(n+1)H_n(x)$$

On remarque donc que pour chaque rang, $H_n(x)$ vaut la somme des deux termes précédents, respectivement multipliés par un polynôme en x et une constante. Ainsi, cela se propage au rang suivant, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $H_n(x)$ est donc forcément un polynôme.

→ Montrons que le degré de $H_n(x)$ est n , et que le coeff. dominant est $(-2)^n$.

$$\cdot a_n = 1 \cdot \begin{cases} H_n = -2x \text{ coeff dominant } (-2)^n \\ \text{degré } 1 \end{cases} \rightarrow \text{cela prouve } P(1) \quad \checkmark$$

Réurrence double I] à $n=0$, on a $H_0 = 1$, d'où le coeff dominant est 1, et $2^0 = 1$. (cela prouve $P(0)$)

De plus, il s'agit bien d'un polynôme de degré 0. $P(0)$
H] soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose la propriété pour n et $n+1$

$$\text{On a } H_{n+2} = -2x H_{n+1} + 2(n+1) H_n$$

Ainsi, puisque H_{n+1} est un polynôme d'ordre 1, on peut écrire $H_{n+1}(x) = x x^{n+1} + P(x)$, avec $P(x) = 0$, ou $P(x) = \text{un polynôme}$

$$\text{Ainsi, } -2x H_{n+1}(x) = -2x x^{n+2} - 2x P(x)$$

d'où H_{n+2} est bien d'ordre $n+2$. $\checkmark$

De plus le coeff dominant x de H_{n+1} est tel que $x = (-2)^{n+1}$ selon notre hypothèse, d'où $-2x H_{n+1} = (-2)^{n+2} x^{n+2} - 2x P(x)$, et comme H_n est d'ordre n d'après $P(n)$, on a bien $(-2)^{n+2}$ le coeff dominant de H_{n+2} après la somme de H_{n+1} et de H_n . Cela prouve donc $P(n+2)$

Conclusion: $H_n(x)$ est d'ordre n , de coeff dominant $(-2)^n$

$$\textcircled{4} f^{(n)}(x) = H_n(x) e^{-x^2}$$

ainsi, $H_n(x) = 0 \Leftrightarrow f^{(n)}(x) = 0$; on s'intéressera donc désormais à la fonction $f^{(n)}$ plutôt.

$\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n)$: " $f^{(n)}$ admet n racines réelles

I] $f^{(0)}(x) = e^{-x^2} \neq 0$ pour tout x réel, d'où distinctes

il y a bien 0 racines à l'équation $f^{(0)}(x) = 0$

(cela prouve $P(0)$) $\checkmark$

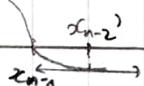
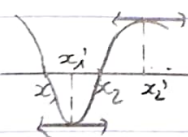
H] Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose $P(n-1)$. Montrons que la propriété est toujours vraie au rang n .

On sait que f est indéfiniment dérivable car c'est le produit d'une exponentielle et d'un polynôme, soit 2 types de fonctions indéfiniment dérivables

On sait aussi que $f^{(n-1)}(x) = 0$ admet

$n-1$ solutions distinctes réelles. Ainsi, pour $i \in [1, n-1]$,

on peut considérer le segment $[x_i, x_{i+1}]$ avec les x_i les



différentes valeurs de x pour lesquelles $f^{(n-1)}(x)$ s'annule.
 Sur ce segment, $f^{(n-1)}$ est continue car dérivable, et
 $f^{(n-1)}(x_i) = f^{(n-1)}(x_{i+1}) = 0$, donc, d'après le théorème
 de Rolle, $\exists c \in [x_i, x_{i+1}] / f'(c) = 0$, soit tel que
 $f^{(n)}(c) = 0$. Or, puisqu'on a au total $n-2$ (x_i) , on a alors
 $n-2$ segments sur lesquels on peut raisonner de la sorte, et
 donc déjà $n-2$ valeurs de x pour lesquelles
 $f^{(n)}(x) = 0$. De plus, on peut raisonner maintenant
 sur les intervalles $]-\infty, x_1]$ et $[x_{n-1}, +\infty[$. (voir exo 5)

$n-1$

Vrai
 d'après le
 T.C.C.
 (pas évident)

On sait que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f^{(n)}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f^{(n)}(x) = 0$,
 d'où, d'après le théorème de Rolle généralisé, étant donné
 que $f^{(n-1)}(x_1) = f^{(n-1)}(x_{n-1}) = 0$, alors $\exists d \in]-\infty, x_1]$
 et $\exists e \in [x_{n-1}, +\infty[/ f^{(n)}(d) = f^{(n)}(e) = 0$ ✓

Ainsi, finalement, au total, on a $(n-2)+2 = n$ valeurs
 de x pour lesquelles $f^{(n)}$ s'annule.

Cela prouve $P(n)$, et on peut archiver

T.B