

Debon Grégory T.D. Dérivation :

Alizéquel Gaël

Moussama Brégarren

Exercice 9 =

Soit P un polynôme de degré $n \geq 2$. Montrons que, si les racines de P sont toutes réelles et simples, alors il en est de même pour P' .

On admet le théorème d'Alentbert-Gours. Sur l'existence : de n racines sur $\mathbb{R}$, qu'on notera : alors racines on a donc, $\forall k \in \{1, \dots, n\}$, $P(a_k) = 0$.

On se donne $[a, b]$, telle que : $\forall k \in \{1, \dots, n\}$, $a_k \in [a, b]$
et on a : $a_1 < a_2 < \dots < a_n$.

Il est clair qu'on a : P est continue sur $[a, b]$, comme sommes de termes continus sur $[a, b]$.

P est dérivable sur $]a, b[$, comme sommes de termes dérivables sur $]a, b[$.

Comme : P est dérivable $]a, b[$ et continue sur $[a, b]$, on a :

$\forall k \in \{1, \dots, n\}$, P est dérivable sur $]a_k, a_{k+1}[$ et continue sur $[a_k, a_{k+1}]$.

et on a : $\forall k \in \{1, \dots, n\}$, $P'(a_k) = P'(a_{k+1})$.

D'après le théorème de Rolle, on a : $\forall k \in \{1, \dots, n\}$, $\exists c_k \in]a_k, a_{k+1}[$, $P'(c_k) = 0$.

Donc P' admet n racines racines distincts, simples ✓
→ Et d'après le thm de D'Alentbert-Gours, P' admet au plus $n-1$ racines.
ce sont les seules.

Exercice 12 =

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$
tels qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que : $g'(c)(f(b) - f(a)) = f'(c)(g(b) - g(a))$.

Considérons $h : x \mapsto g(x)(f(b) - f(a)) - f(x)(g(b) - g(a))$.

Montrons que : $h \in \mathcal{C}^0([a, b])$ par le théorème général :

h est encore dérivable sur $]a, b[$, par le théorème général
(somme de fonctions dérivables).

On a : $h(a) = g(a)(f(b) - f(a)) - f(a)(g(b) - g(a))$

et $h(b) = g(b)(f(b) - f(a)) - f(b)(g(b) - g(a))$

$$= g(b)f(b) - f(a)g(b) - f(b)g(b) + g(a)f(b)$$

$$= g(b)f(b) - f(a)g(b) + (-f(a)g(a) + g(a)f(a)) - f(b)g(b) + g(a)f(b)$$

$$= -f(a)(g(b) - g(a)) + g(a)(f(b) - f(a))$$

$$= h(a).$$

Donc $h(a) = h(b)$

Donc : Par le théorème de Rolle : on a :

$$\exists c \in]a, b[\quad h'(c) = 0.$$

D'où :

$$\exists c \in]a, b[, \quad g'(c)(g(b) - g(a)) = g'(c)(f(b) - f(a))$$

C'est ça !
Σ

Exercice 13 = Moyenne Arithmétique et Géométrique.

Soit $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}_+^*$. Montrons que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \quad (*)$$

On a : $(*) \Leftrightarrow \ln \left(\left(\prod_{i=1}^n a_i \right)^{1/n} \right) \leq \ln \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \right)$

(bien définie car : on a : $\forall i \in \{1, \dots, n\}, a_i > 0$).

$$(*) \Leftrightarrow \frac{1}{n} \ln \left(\prod_{i=1}^n a_i \right) \leq \ln \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \right) \quad \checkmark$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(a_i) \leq \ln \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \right) \quad \checkmark$$

Montrons alors qu'on a : l'inégalité : $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(a_i) \leq \ln \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \right)$ est vérifiée.

On sait que : $\mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$.
 $x \mapsto \ln(x)$ est concave, il vient donc que :
 $x \mapsto -\ln(x)$ est convexe.

En posant : $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $dx = \frac{1}{n}$, il est clair qu'on a :

$$\sum_{k=1}^n dx = n \times \frac{1}{n} = 1 \checkmark \text{ d'où } \sum_{k=1}^n dx = 1.$$

Par l'inégalité de Jensen, on a :

$$-\ln\left(\sum_{i=1}^n d_i a_i\right) \leq \sum_{i=1}^n d_i \times (-1) \times \ln(a_i).$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} a_i\right) \geq \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \cdot \ln(a_i) \checkmark$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i\right) \geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(a_i) \checkmark$$

On obtient donc l'inégalité demandée ! $\checkmark$ QED!
?.
