TD 16 : Limites et continuité

Calculs de limites

Ex 1 Périodicité
Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction périodique. Montrer que si f admet une limite finie en $+\infty$ alors f est constante.
En déduire que sin n'admet pas de limite en $+\infty$.

Ex 2 Déterminer, si elles existent, les limites des expressions suivantes

1. $\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{m^2x^2+x+2m^2}}{x}$ en $a=0$ et $a=+\infty$
2. $x\left\lfloor \dfrac{1}{x}\right\rfloor$ en $a=0$ et $a=+\infty$
3. $x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ en $a=0$ et $a=+\infty$
4. $\dfrac{b^x-1}{\ln(x+1)}$ avec $b>1$ en $a=0$
5. $\dfrac{e^{\sin(x)}-\sqrt{1+x}}{\tan(x)}$ en $a=0$
6. $\dfrac{\sin(x)-\cos(x)\sqrt{3}}{2\cos(x)-1}$ en $a=\dfrac{\pi}{3}$
7. $\cos(x)^{\frac{1}{\sin^2(x)}}$ en $a=0$
8. $\dfrac{r^t e^{i\alpha t}-1}{t}$ en $a=0$ avec $r>0$ et $\alpha\in\mathbb{R}$

Généralités sur la continuité

Ex 3 Étudier la continuité de l'application $f : x\mapsto \lfloor x\rfloor+(x-\lfloor x\rfloor)^2$.

Ex 4 Étudier la continuité de $f=\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ ainsi que de $f\circ f$. Montrer que f est périodique.

Ex 5 Les fonctions suivantes sont-elles prolongeables par continuité ?

$$f : x\mapsto \frac{|x|}{x},\quad f : x\mapsto \frac{1}{x-3}-\frac{4}{x^2-2x-3},\quad f : x\mapsto \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}\quad \text{et}\quad f : x\mapsto \frac{\sin(nx)}{\sin(x)}$$

Ex 6 Équations fonctionnelles

1. Trouver toutes les fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ qui vérifient f est continue en 0 et
$$\forall x\in\mathbb{R},\ f(2x)=f(x)$$
Pour un réel a fixé, montrer que pour tout entier n, $f(2^{-n}a)=f(a)$ puis utiliser la continuité pour montrer que $f(a)=f(0)$.
2. Trouver toutes les fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ qui vérifient f est continue sur $\mathbb{R}$ et
$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x+y)=f(x)+f(y)$$
(on cherchera d'abord son expression sur $\mathbb{N}$, puis $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et enfin $\mathbb{R}$)
Pour passer de $\mathbb{Q}$ à $\mathbb{R}$, on utilisera la densité de $\mathbb{Q}$ et la continuité de f : pour $x\in\mathbb{R}$ donné, il existe une suite de rationnels $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n\to x$, puis s'intéresser à $f(x_n)$.

Théorèmes sur la continuité

Ex 7

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ et $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$. Montrer que f s'annule.
   On peut garantir l'existence d'un réel x tel que $f(x) \leq -1$ et d'un réel y tel que $f(y) \geq 1$
   En déduire que tout polynôme de degré impair admet au moins une racine réelle.

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{-\infty} f = +\infty$. Montrer que f admet un minimum global sur $\mathbb{R}$.
   Poser $A = f(0)$. On sait qu'il existe B tel que pour tout $x \leq B$, $f(x) \geq f(0)$ et qu'il existe C tel que pour tout $x \geq C$, $f(x) \geq f(0)$. La recherche d'un minimum pour la fonction f peut alors se restreindre au segment $[B, C]$.

3. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue telle que $\lim\limits_{+\infty} f$ existe et est finie. Montrer que f est bornée.
   Il existe A tel que pour tout $X \geq A$, on ait $f(x) \in [\ell - 1; \ell + 1]$ où ℓ est la limite de f en $+\infty$. Justifier que f est également bornée sur $[0, A]$

Ex 8 Théorème du point fixe
On considère une fonction $f : [0,1] \to [0,1]$.

1. (a) Montrer que f admet un point fixe si f est continue.Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires avec la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$.
   (b) En est-il de même si on supprime l'hypothèse de continuité? $f([0,1]) \not\subset [0,1]$?
   Penser à un contre-exemple constant par morceaux

2. Montrer qu'il y a unicité du point fixe si f est décroissante sur $[0,1]$.
   Supposer que $x < y$ sont deux points fixes de f et aboutir à une contradiction.

Ex 9 Soient f et g deux fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ telles que $\forall x \in [a,b], f(x) > g(x)$.
Montrer l'existence d'un réel $\lambda \geqslant 0$, tel que $\forall x \in [a,b], f(x) \geqslant g(x) + \lambda$.
Définir $h = f - g$. h est une fonction continue sur le segment $[a,b]$ donc bornée et atteint ses bornes, donc atteint son minimum. Montrer que ce minimum est strictement positif.

Ex 10 Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ continue telle que :

$$\forall (x,y) \in [0,1]^2, |f(x) - f(y)| \geqslant |x - y|$$

1. Montrer que f est injective sur $[0,1]$.Raisonner par l'absurde

2. Montrer que $f([0,1]) = [0,1]$. Conclure.
   Supposer que $f(0) \in]0,1[$ et montrer que cela est absurde. On aura donc $f(0) = 0$ ou 1, puis $f(1) = 1$ (ou 0 respectivement).

Ex 11 Suite définie implicitement
Prouver que l'équation $x^n = nx - 1$ admet une unique solution x_n sur $[0,1]$ pour $n > 1$. Déterminer la limite de (x_n).
Introduire la fonction $g_n : x \mapsto x^n - nx + 1$

Ex 12 On suppose que la température en un point du globe est une fonction continue des coordonnées géographiques.
Montrer qu'il existe deux points situés aux antipodes ayant la même température (se ramener à un cercle puis à une fonction périodique sur $\mathbb{R}$) En notant $T(\theta)$ la température au point de l'équateur de longitude θ, on voit que T est un fonction $2\pi - priodique$ et continue. On pose ensuite $f : \theta \mapsto T(\theta) - T(\theta + \pi)$ (la différence de températures entre les points de longitude θ et $\theta + \pi$ qui sont antipodaux). Alors, f est continue, 2π-périodique, et ne peut pas être de signe constant (à justifier) donc s'annule.