

DAROUICHE Rihab
CORPETTI Nola
GIOIA Ethan
CHARAFOUDINE Allan

T.D 16 : Limites et continuité

Exercice 6

1. $\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = f(x)$ et f continue en 0

Idée : $f(x) = f(2 \cdot \frac{x}{2}) = f(\frac{x}{2}) \dots \rightarrow$ Conjecture : $f(x) = f(\frac{x}{2^m}) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} f(0)$

$\forall m \in \mathbb{N} \quad P(m)$ "Soit $a \in \mathbb{R}, f(2^{-m}a) = f(a)$ "

Fixez le a avant de rédiger la récurrence.

Initialisation :

$$f(2^0 a) = f(1 \times a) = f(a)$$

Cela prouve $P(0)$ ✓

Hérédité : Soit $m \in \mathbb{N}$ on suppose $P(m)$

$$f\left(\frac{a}{2}\right) \stackrel{\text{en utilisant } P(m)}{=} f\left(2^{-m} \times \frac{a}{2}\right) = f(2^{-(m+1)} \times a)$$

Cela prouve $P(m+1)$ avec $\frac{a}{2}$ (À ce moment-là, on inclure un "Voilà !" dans la $P(m)$).

Conclusion : Soit $a \in \mathbb{R} \quad f(2^m a) = f(a) \quad \forall m \in \mathbb{N}$

$$\text{On a } 2^{-m} a \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$$

on a $\lim_{m \rightarrow +\infty} f(2^{-m} a) = f(0)$ Comme f est continue,

et comme le résultat est valable $\forall a \in \mathbb{R}$ on a

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = f(0). \quad \checkmark$$

2. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie f est continue sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x) + f(y)$$

On procède par Analyse / Synthèse

Analyse: Soit f une fonction telle que $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x) + f(y)$

$$\text{Pour } y=0 \quad f(x+0) = f(x) + f(0) \quad \checkmark$$

$$\Leftrightarrow f(x) = f(x) + f(0)$$

$$\Leftrightarrow f(0) = 0 \quad \checkmark$$

$$f(2x) = f(x) + f(x) = 2f(x) \quad \checkmark$$

$$f(3x) = f(2x+x) = f(2x) + f(x) = f(x) + 2f(x) = 3f(x) \quad \checkmark$$

On fixe x , $\forall n \in \mathbb{N}$

$$P(n) : "f(nx) = n f(x)" \quad \checkmark$$

Initialisation:

$$f(0 \cdot x) = f(0) = 0 \quad \checkmark$$

et $0 \cdot f(x) = 0$. Cela prouve $P(0)$.

Hérédité: Soit $m \in \mathbb{N}$, on suppose $P(m)$.

$$f((m+1)x) = f(mx+x) = f(mx) + f(x) \quad \checkmark = m f(x) + f(x) \quad \checkmark$$

$$= (m+1)f(x) \quad \checkmark \quad \text{Cela prouve } P(m+1).$$

Conclusion: Pour un x donné, $\forall m \in \mathbb{N}$ $f(mx) = m f(x)$. ✓

Si $x = 2m$ avec $m \in \mathbb{N}$, $f(nx) = f(mn x) = mn f(x)$

car $mn \in \mathbb{N} \rightarrow$ raisonnement analogue avec $x = 2m+1$

Dans le cas où x appartient à $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, on raisonne avec $-x$ qui appartient à $\mathbb{N}$, on généralise donc à $\mathbb{Z}$ avec la même distinction de cas $\begin{cases} x = 2m+1 & \text{so} \\ x = 2m & \text{so.} \end{cases}$

Pour $\mathbb{Q}$, on pose $x = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}$

$$f(qx) = f(p) = p f(1) = q f(x) \quad \checkmark$$

donc $\frac{p}{q} = f(x) \checkmark$ à condition que $f(1) = 1$

[Idée pour la fin $\rightarrow$ utiliser la continuité et la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ pour trouver une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} \mid f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$
 $\hookrightarrow x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$

$\hookrightarrow$ Oui: soit $x \in \mathbb{R}$, comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, $\exists (x_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} \mid x_n \rightarrow x$.

On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(x_n) = x_n$ car $x_n \in \mathbb{Q}$

et $\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{f(x_n)}_{\substack{\text{"} \\ x_n \\ \text{"}}} = f(x)$ car f est continue.

Donc $f(n) = n$.