

Exercice 5-

• $\forall x \in \mathbb{R}^*, f: x \mapsto \frac{|x|}{x}$

on a donc $\begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$$

donc f n'est pas prolongeable par continuité en 0.

• $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}, f: x \mapsto \frac{1}{x-3} - \frac{4}{x^2-2x-3}$

avec x^2-2x-3

$$\Delta = 4+12=16$$

$$x_1 = \frac{2-4}{2} = -1 \text{ et } x_2 = \frac{2+4}{2} = 3$$

on a donc $x^2-2x-3 = (x+1)(x-3)$

on a $f: x \mapsto \frac{1}{x-3} - \frac{4}{(x+1)(x-3)} = \frac{(x+1)-4}{(x+1)(x-3)} = \frac{(x-3)}{(x+1)(x-3)} = \frac{1}{x+1}$

donc $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{x+1} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{x+1} = -\infty$

donc f n'est pas prolongeable en -1 par continuité

et $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \frac{1}{3+1} = \frac{1}{4}$

donc f est pas prolongeable en 3 en posant $f(3) = \frac{1}{4}$.

• $\forall x \in \mathbb{R}^*, f: x \mapsto \frac{x}{1+e^{1/x}}$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$

par ~~TCC~~

donc f est prolongeable en 0 par continuité

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$

par ~~TCC~~

• $\forall x \in \mathbb{R}^* \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}, f: \frac{\sin(nx)}{\sin(x)}$

quand $x \rightarrow 0$, on peut approximer $\sin(nx) \sim nx$
 $\sin(x) \sim x$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{nx}{x} = n$

Quand $x \rightarrow 0$, avec $k \in \mathbb{N}^*$:

- Si k pair, $\sin(n(k\pi + x)) \approx \sin(nx) \approx nx$
- Si k impair, $\sin(n(k\pi + x)) \approx -\sin(nx) \approx -nx$

Donc : $\frac{\sin(nx)}{\sin(x)} \approx \frac{\pm nx}{x} = \pm n$

$\rightarrow \lim_{x \rightarrow k\pi} \frac{\sin(nx)}{\sin(x)} = \pm n$ /

Donc : f est prolongeable en $k\pi$,
avec $k \in \mathbb{N}^*$