

~~Exercice~~

Mardi 4 février 2025

TD n°16 de Mathématiques

Exercice 10.

Soit $f: [0,1] \rightarrow [0,1]$ continue /
 $\forall (x,y) \in [0,1]^2, |f(x) - f(y)| \geq |x - y|$

1) Mq f est injective sur $[0,1]$.

i.e. mq $\forall (x_1, x_2) \in [0,1]^2, f(x_1) = f(x_2)$

$$\Rightarrow x_1 = x_2$$

Raisonnons par l'absurde:

Supposons que f n'est pas injective sur $[0,1]$

i.e. $\exists (x_1, x_2) \in [0,1]^2, f(x_1) = f(x_2)$ et $x_1 \neq x_2$.

alors $|f(x_1) - f(x_2)| \geq |x_1 - x_2|$

d'où $|0| \geq |x_1 - x_2|$: absurde !
car $f(x_1) = f(x_2) \neq 0$ car $x_1 \neq x_2$ ✓

donc f est injective sur $[0,1]$. ✓

2) Mq $f([0,1]) = [0,1]$. Conclusion.

Procédons par double inclusion:

[C] Soit f est continue / $f: [0,1] \rightarrow [0,1]$.

donc $f([0,1]) \subset [0,1]$.

[C] $f(0) - f(1) \geq 1$ ou $f(0) - f(1) \leq -1$

$$f(0) \geq 1 + f(1) \geq 1 \quad \checkmark$$

car $f(1) \geq 0$

or $f(0) \in [0,1]$

donc $1 \leq f(0) \leq 1$ ✓

$$\boxed{f(0) = 1} \quad \checkmark$$

ainsi $f(0) \geq 1 + f(1)$

$$0 \geq f(1)$$

donc $0 \geq f(1) \geq 0$

$$\boxed{f(1) = 0} \quad \checkmark$$

$$f(0) \leq f(1) - 1 \leq 0$$

car $f(1) \leq 1$

or $f(0) \in [0,1]$

donc $0 \leq f(0) \leq 0$

$$\boxed{f(0) = 0} \quad \checkmark$$

ainsi $f(0) \leq f(1) - 1$

$$1 \leq f(1)$$

$$\boxed{f(1) = 1} \quad \checkmark$$

f est injective donc strictement monotone car f est continue.
 $f([0; 1]) = \begin{cases} [f(0); f(1)] & \text{si } f \text{ strictement croissante} \\ [f(1); f(0)] & \text{si } f \text{ strictement décroissante} \end{cases}$

Dans les deux cas on a :

$$f([0; 1]) \subset [0; 1]$$

Conclusion: $f([0; 1]) = [0; 1]$. ✓

De plus : Si $y = 0$:

$$\forall x \in [0; 1], |f(x) - f(0)| \geq |x|$$

Cas f strictement croissante :

$$\bullet |f(x) - 0| \geq |x|$$

$$\text{i.e. } |f(x)| \geq |x|$$

$$\text{or } f(x) \text{ et } x \in [0; 1]$$

$$\text{donc } f(x) \geq x.$$

$$\bullet |f(x) - f(1)| \geq |x - 1|$$

$$\text{d'où } |f(x) - 1| \geq |x - 1|$$

$$\text{i.e. } 1 - f(x) \geq 1 - x \quad \checkmark$$

$$f(x) \leq x \quad \checkmark$$

donc $f(x) = x$: ✓ il s'agit donc de la fonction identité: $f: x \mapsto x$

Cas f strictement décroissante :

Avec la même démarche, on aboutit à

$$f: x \mapsto 1 - x \quad \checkmark$$

Conclusion: il n'y a que 2 fonctions solutions:

$$f_1: x \mapsto x \quad \text{et} \quad f_2: x \mapsto 1 - x.$$