

Ex 9

Soit B_k "tirer une boule blanche au k -ième tirage"
 et $\overline{B_k}$ "tirer une boule rouge au k -ième tirage"

On pose E_k l'événement "tirer exactement une boule blanche au k -ième tirage sur n tirages"

$$E_k = \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} \overline{B_i} \right) \cap B_k \cap \left(\bigcap_{i=k+1}^n \overline{B_i} \right)$$

Avec $\bigcap_{i=1}^{k-1} \overline{B_i}$ tout les tirages de boules rouges précédant celui de la boule blanche ✓

et $\bigcap_{i=k+1}^n \overline{B_i}$ tout les tirages de boules rouges suivant celui de la boule blanche. ✓

On a donc d'après la F.P.C

$$\begin{aligned} P(E_k) &= P\left(\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} \overline{B_i}\right) \cap B_k \cap \left(\bigcap_{i=k+1}^n \overline{B_i}\right)\right) \\ &= P\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} \overline{B_i}\right) \times P(B_k | \bigcap_{i=1}^{k-1} \overline{B_i}) \times P\left(\bigcap_{i=k+1}^n \overline{B_i} | \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} \overline{B_i}\right) \cap B_k\right) \\ &= \left(\frac{r}{b+r}\right)^{k-1} \times \frac{b}{b+r} \times \left(\frac{r}{b-1+r}\right)^{n-k} \end{aligned}$$

Car un tirage de boule rouge ne modifie pas les probas au tours c. probas, suivant
 les tirages précédents n'ayant pas changés les probas, $P(B_k | \bigcap_{i=1}^{k-1} \overline{B_i}) = P(B_i) = \frac{b}{b+r}$
 on a retiré une boule blanche donc -1 au nb total et on pioche une boule rouge

Soit U l'événement "on obtient uniquement une boule blanche sur n tirages" ✓

$$U = \bigcup_{k=1}^n E_k = \bigcup_{k=1}^n \left(\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} \overline{B_i}\right) \cap B_k \cap \left(\bigcap_{i=k+1}^n \overline{B_i}\right) \right)$$

$$P(U) = \sum_{k=1}^n P(E_k) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{r}{b+r}\right)^{k-1} \times \frac{b}{b+r} \times \left(\frac{r}{b-1+r}\right)^{n-k}$$