

HOAREAU Samia

Mardi 21 janvier 2025

ANDRIAMBELO Hankiana

TD 14 : exercice 12

AMOURDOM MARIATÉ Noémie

$$\text{Mq } \forall p \in \mathbb{N} \text{ et } n \in \mathbb{N}, \text{ on a } \sum_{k=0}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$

Preuve par récurrence:

$$\text{Soit } p \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \text{ on a } \mathcal{P}(n): \sum_{k=0}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$

Initialisation: pour $n=0$:

$$\sum_{k=0}^0 \binom{k}{p} = \binom{0}{p}$$

Distinction de cas:

$$\text{si } p=0: \binom{0}{0} = 1 \text{ et } \binom{n+1}{p+1} = \binom{0+1}{0+1} = \binom{1}{1} = 1 \quad \checkmark$$

$$\text{si } p > 0: \binom{0}{p} = 0 \text{ car } p > 0$$

$$\text{et } \binom{n+1}{p+1} = \binom{0+1}{p+1} = \binom{1}{p+1} = 0 \text{ car } p > 0 \text{ i.e. } p+1 > 1 \quad \checkmark$$

ce qui prouve $\mathcal{P}(0)$. $\checkmark$ Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose $\mathcal{P}(n)$ i.e.

$$\sum_{k=0}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$$

Mq alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{k}{p} = \underbrace{\sum_{k=0}^n \binom{k}{p}}_{\text{d'après } \mathcal{P}(n)} + \binom{n+1}{p} \quad \checkmark$$

$$= \binom{n+1}{p+1} + \binom{n+1}{p} \quad \checkmark$$

$$= \binom{(n+1)+1}{p+1} \quad \checkmark \text{ d'après la formule de Pascal}$$

ce qui prouve $\mathcal{P}(n+1)$. $\checkmark$ Conclusion: $\forall p \in \mathbb{N}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $\sum_{k=0}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$. $\square$ $\checkmark$