Colle 18 : Dérivation

Résultats et preuves à connaître

Définition 1 Théorème

Soit f dérivable sur $]\alpha,\beta[$ et $a \in]\alpha,\beta[$.
Si f admet un extremum local en a alors $f'(a) = 0$: a est appelé **point critique** de f.

Proposition 1 Théorème de Rolle

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.
Si f est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et $f(a) = f(b)$ alors $\exists c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Proposition 2 Égalité des accroissements finis (EAF)

À démontrer en admettant la proposition 1 Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.
Si f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ alors $\exists c \in]a,b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.

Proposition 3 Inégalité des accroissements finis (IAF)

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.
Si f est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et $\exists k \geqslant 0$, $|f'| \leqslant k$ alors f est k**-lipschitzienne** i.e.

$$\forall (x,y) \in [a,b]^2,\ |f(x) - f(y)| \leqslant k\,|x-y|$$

Proposition 4 Caractérisation de la monotonie pour les fonctions dérivables

Soit f dérivable sur $]a,b[$.
f est croissante sur $]a,b[\iff f' \geqslant 0$ sur $]a,b[$.
f est décroissante sur $]a,b[\iff f' \leqslant 0$ sur $]a,b[$.
f est constante sur $]a,b[\iff f' = 0$ sur $]a,b[$.

Proposition 5 Théorème (Stricte monotonie)

Soit f dérivable sur $]a,b[$.
f est strictement monotone sur $]a,b[\iff f'$ est de signe constant sur $]a,b[$ et ne s'annule pas sur un intervalle ouvert inclus dans $]a,b[$.

Proposition 6 Interprétation géométrique

Une fonction est convexe si pour tout couple de réels $(x,y) \in I^2$, l'arc de la courbe compris entre les points A (de coordonées $(x, f(x))$) et B (de coordonnées $(y, f(y))$) se situe sous la sécante reliant A et B.

Proposition 7 Inégalité de Jensen

Savoir rappeler la défintion de fonction convexe, ainsi que son interprétation graphique.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Alors, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, et tout n-uplet $(x_1, \ldots, x_n) \in I^n$

$$\forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}^+)^n \text{ vérifiant } \lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1 \text{ on a } f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i).$$

Proposition 8 Inégalité des pentes

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Alors pour tout $(a,b,c) \in I^3$ vérifiant $a < b < c$, on a

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leq \frac{f(c)-f(b)}{c-b}.$$

À savoir faire

- ☐ Savoir utiliser l'inégalité des accroissements finis (par exemple, pour trouver la vitesse de convergence d'une suite définie par une relation de récurrence)
- ☐ Savoir utiliser l'égalité des accroissements finis, le théorème de Rolle
- ☐ Savoir dériver n fois une fonction (formule de Leibniz, ou calculer la dérivée, dérivée seconde etc. conjecturer une formule puis la prouver par récurrence)
- ☐ Montrer qu'un prolongement est de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle (donner l'énoncé du théorème utilisé).
- ☐ Tous les exercices sur la continuité (théorème des valeurs intermédiaires, des bornes atteintes etc.)

Ce qu'en dit le programme

B - Dérivabilité

Contenus	Capacités & commentaires
b) Extremum local et point critique	
Condition nécessaire d'extremum local en un point intérieur.	Un point critique est un zéro de la dérivée.
c) Théorèmes de Rolle et des accroissements finis	
Théorème de Rolle.	
Égalité des accroissements finis.	Interprétations géométrique et cinématique.
Inégalité des accroissements finis : si f est dérivable et si $\lvert f' \rvert$ est majorée par K, alors f est K-lipschitzienne.	La notion de fonction lipschitzienne est introduite à cette occasion. Application à l'étude de suites définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.
Caractérisation des fonctions dérivables constantes, monotones, strictement monotones sur un intervalle.	
Théorème de la limite de la dérivée : si f est continue sur I, dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$.	La fonction f' est alors continue en a.
Extension au cas où $\ell = \pm\infty$.	

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
d) Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$	
Pour $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, fonction de classe $\mathcal{C}^k$. Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^k$: combinaison linéaire, produit (formule de Leibniz), quotient, composition, réciproque.	Les démonstrations relatives à la composition et à la réciproque ne sont pas exigibles.
e) Fonctions complexes	
Brève extension des définitions et résultats précédents.	Caractérisation de la dérivabilité en termes de parties réelle et imaginaire.
Inégalité des accroissements finis pour une fonction complexe de classe $\mathcal{C}^1$.	On mentionne que l'inégalité résulte d'une simple majoration d'intégrale, justifiée ultérieurement dans la section Intégration.

C - Convexité

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Généralités	
La fonction f est convexe sur I si, pour tous $(x,y) \in I^2$ et $\lambda \in [0,1]$, $f((1-\lambda)x+\lambda y) \leqslant (1-\lambda)f(x)+\lambda f(y)$.	Interprétation géométrique.
Inégalité de Jensen : si f est une fonction convexe sur un intervalle I, on a l'inégalité $$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$ quels que soient les réels positifs $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de somme 1 et quels que soient les éléments $x_1, \dots, x_n$ de I. Caractérisation de la convexité par la croissance des pentes. Position du graphe d'une fonction convexe par rapport à ses sécantes.	Tout développement général sur les barycentres est hors programme.
b) Fonctions convexes dérivables, deux fois dérivables La semaine prochaine...	