

DS n°6.**Durée : 4 heures - Durée minimale obligatoire : 3 heures et 50 minutes****La calculatrice est interdite.****Question de cours - Exercices d'applications du cours**

1. Rappeler l'énoncé (et donc les hypothèses) de l'égalité des accroissements finis, et démontrer ce résultat (on aura le droit d'admettre les autres théorèmes du cours sans les redémontrer).
2. Déterminer l'ensemble de tous les couples $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ vérifiant l'égalité $102x + 81y = 2$
3. Déterminer l'ensemble de tous les couples $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ vérifiant l'égalité $96x + 33y = 15$
4. Trouver un couple (on ne les demande pas tous) $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ vérifiant l'égalité $974x + 104y = 2$

Exercice 1 : Une usine qui fabrique des pièces

Une usine fabrique des pièces, dont 5% sont défectueuses. Le contrôle des fabrications est tel que :

- si la pièce est bonne, elle est acceptée avec la probabilité 0,96.
- si la pièce est mauvaise, elle est refusée avec la probabilité 0,98.

On choisit une pièce au hasard et on la contrôle. Quelle est la probabilité

1. qu'il y ait une erreur de contrôle ?
2. qu'une pièce acceptée soit mauvaise ?

Exercice 2 : Une équation fonctionnelle

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}(f(x) + f(y))$.

1. Vérifier que les fonctions affines sont solutions de cette équation.
2. Dans cette question, on cherche à déterminer les fonctions qui sont solutions de l'équation et qui s'annulent en 0 et en 1.
 - (a) Démontrer que, pour tout entier $p \in \mathbb{N}$, on a $f(p) = 0$.
 - (b) Démontrer que, pour tout entier $p \in \mathbb{Z}$, on a $f(p) = 0$.
 - (c) Démontrer que, pour tout $p \in \mathbb{Z}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f\left(\frac{p}{2^n}\right) = 0$.
 - (d) Soit $x \in \mathbb{Z}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $x_n = \frac{\lfloor 2^n x \rfloor}{2^n}$. Démontrer que (x_n) converge vers x .
 - (e) En déduire que f est identiquement nulle.
3. Dans le cas général, démontrer que f est une fonction affine.

Exercice 3 : Arithmétique

Soient m et n deux entiers. On considère dans cette question les solutions (p, q) de l'équation

$$p^n - 1 = q^m \quad \text{avec } p \text{ et } q \text{ deux entiers premiers}$$

1. Montrer que p et q ne peuvent pas être impairs tous les deux. En déduire que $p = 2$ ou $q = 2$.

2. On suppose ici $q = 2$. Vérifier l'identité

$$p^n - 1 = (p - 1)(p^{n-1} + p^{n-2} + \dots + p + 1)$$

En déduire que $p - 1$ est une puissance de 2 puis que l'on a seulement deux possibilités : $n = 1$ ou $n = 2s$ avec $s \in \mathbb{N}^*$ et dans ce cas, nécessairement, $p = 3$ et $m = 3$, $s = 1$.

3. On suppose ici $p = 2$ et $m = 2t + 1$ où $t \in \mathbb{N}$. Vérifier l'identité

$$2^n = (q + 1)(q^{2t} - q^{2t-1} + q^{2t-2} + \dots + q^2 - q + 1)$$

Montrer que $\sum_{k=0}^{2t} q^k (-1)^k$ est impair. Conclure que $t = 0$ puis que $m = 1$. Que peut-on dire de q ?

4. On suppose ici $p = 2$ et $m = 2^s t$ où t est impair et $s \in \mathbb{N}^*$.

- (a) Montrer que $t = 1$ en appliquant un raisonnement similaire aux questions précédentes.
- (b) Montrer que $q^{2^s} - 1 = 2(2^{n-1} - 1)$.
- (c) Remarquer que $q^2 - 1$ divise $q^{2^s} - 1$ et que 8 divise $q^2 - 1$. Conclure à une impossibilité.

5. Expliciter les couples (p, q) solutions en fonction de m et n .

Exercice 4 : Le théorème de Darboux

On se propose, dans cet exercice, de démontrer le théorème de Darboux dont l'énoncé concis est le suivant :
"Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable, alors $f'(I)$ est un intervalle".

1. Démontrer le résultat dans le cas où f est une fonction constante.

2. On suppose f non constante.

Soit $(a, b) \in I^2$ tel tel que $f'(a) < f'(b)$. Soit $z \in]f'(a), f'(b)[$.

(a) Montrer que

$$\exists \alpha > 0, \forall h \in]0, \alpha], \frac{f(a+h) - f(a)}{h} < z < \frac{f(b+h) - f(b)}{h}$$

(b) En déduire

$$\exists h > 0, \exists y \in I, y+h \in I \text{ et } \frac{f(y+h) - f(y)}{h} = z$$

(c) Montrer

$$\exists x \in I, z = f'(x)$$

(d) En déduire que $f'(I)$ est un intervalle.

3. **Application :** On note E la fonction partie entière.

Montrer qu'il n'existe pas de fonction dérivable f définie sur $\mathbb{R}$ dont la dérivée soit égale à E .

4. **Application :** Soit f une fonction convexe définie sur un intervalle $\mathbb{R}$. On suppose que f est dérivable.
 Montrer que f est $\mathcal{C}^1$

Problème : Analyse

On considère les fonctions f et g définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right) \quad \text{et} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{g(x)}{x} & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

I. Etude de f **1. Etude de la continuité**

- (a) Montrer que f est continue sur $] -\infty, 0[$ et $] 0, +\infty[$.
- (b) Montrer que g' est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- (c) En utilisant l'égalité des accroissements finis, démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{x}{2} \leq g(x) \leq x \frac{e^x}{1+e^x}$
- (d) En déduire que f est continue en 0. Conclure.

2. Etude de la dérivabilité

- (a) Montrer que f est dérivable sur $] -\infty, 0[$ et $] 0, +\infty[$.
- (b) Démontrer qu'il existe une constante M (que l'on ne cherchera pas à calculer) telle que :

$$\forall x \in [-1, 1], \left| g^{(3)}(x) \right| \leq M$$

- (c) Démontrer que : $\forall x \in [-1, 1], \left| g(x) - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \right| \leq \frac{M}{6} |x|^3$ (On montrera l'inégalité d'abord sur $[0, 1]$)
- (d) En déduire que f est dérivable en 0 et expliciter $f'(0)$. Conclure.

3. Etude des variations

- (a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. Quelles conséquences géométriques peut-on en déduire sur C_f ?
- (b) Déterminer le sens de variation de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = xg'(x) - g(x)$. En déduire le sens de variation de f .
- (c) Dresser le tableau de variations de f .

II. Calculs de limites

- 1. Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. On pose $k = \ln \frac{b}{a}$ et on considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$\varphi(x) = \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}}$$

- (a) Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^*, \varphi(x) = ae^{kf(kx)}$
- (b) Montrer que φ est prolongeable par continuité en 0 et préciser $\varphi(0)$.
- (c) Donner le tableau de variations de φ .

- 2. Soient a et b deux réels strictement positifs.

Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} = \max\{a, b\}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} = \sqrt{ab}$