

DS n°5.**Durée : 2 heures**

L'évaluation se faisant principalement sur la qualité de la rédaction, vous soignerez la précision et la concision des arguments que vous avancerez au cours des démonstrations ainsi que la présentation de vos résultats en les encadrant ou les soulignant, Vous n'oublierez pas de faire une marge à gauche sur chaque feuille, de bien inscrire le numéro des exercices, tracer un trait entre chaque question ainsi que de numéroté vos copies avant de les rendre. la présentation peut vous faire perdre des points

Question de cours - Exercices d'applications du cours

1. Soit f une fonction continue sur un segment $I = [a, b]$, à valeurs réelles. Démontrer que f est bornée. Que peut-on dire de plus sur la fonction f ? (Pour cette deuxième proposition, aucune démonstration n'est attendue).
2. Soit $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 5 & 8 & 1 & 9 & 3 & 7 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, déterminer σ^{-1} et σ^{2025}
3. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x)^2 = 1$. Démontrer que $f = \tilde{1}$ ou $f = -\tilde{1}$.

Exercice : l'ensemble $\mathcal{A}_5$

1. Que valent les cardinaux de $\mathcal{A}_5$ et de $\mathcal{S}_5$?
2. Si $\sigma \in \mathcal{S}_5$ est une transposition, appartient-elle à $\mathcal{A}_5$? Déterminer le cardinal de H_2 , l'ensemble des transpositions de $\mathcal{S}_5$.
3. Si $\sigma \in \mathcal{S}_5$ est la composée de deux transpositions à supports disjoints, de la forme $\sigma = (ab)(cd)$ appartient-elle à $\mathcal{A}_5$? Déterminer le cardinal de $H_{2,2}$, l'ensemble des permutations de $\mathcal{S}_5$ de cette forme-là.
4. Si $\sigma \in \mathcal{S}_5$ est un 3-cycle, appartient-elle à $\mathcal{A}_5$? Déterminer le cardinal de H_3 , l'ensemble des 3-cycles de $\mathcal{S}_5$
5. Si $\sigma \in \mathcal{S}_5$ est un 4-cycle, appartient-elle à $\mathcal{A}_5$? Déterminer le cardinal de H_4 , l'ensemble des 4-cycles de $\mathcal{S}_5$
6. Si $\sigma \in \mathcal{S}_5$ est un 5-cycle, appartient-elle à $\mathcal{A}_5$? Déterminer le cardinal de H_5 , l'ensemble des 5-cycles de $\mathcal{S}_5$
7. Si $\sigma \in \mathcal{S}_5$ est la composée d'un 3-cycle et d'un 2-cycle à support disjoints, appartient-elle à $\mathcal{A}_5$? Déterminer le cardinal de $H_{3,2}$, l'ensemble des permutations de cette forme là.
8. déterminer l'ensemble H formé des permutations de $\mathcal{S}_5$ ne faisant partie d'aucun des sous-ensembles précédents, c'est-à-dire $H_2, H_3, H_4, H_5, H_{2,2}, H_{3,2}$
9. Soit G un sous-ensemble de $\mathcal{A}_5$ s'écrivant comme une union réalisée à l'aide de certains des sous-ensembles $H, H_2, H_3, H_4, H_5, H_{2,2}, H_{3,2}$ (éventuellement tous, éventuellement aucun, voire un ou 2 etc.)
On suppose de plus que le cardinal de G divise celui de $\mathcal{A}_5$. Déterminer de quel ensemble il peut s'agir
(Remarque : il peut y avoir plusieurs possibilités)

Problème : marche aléatoire sur un triangle

On considère trois points distincts du plan nommés A , B et C . Nous allons étudier le déplacement aléatoire d'un pion se déplaçant sur ces trois points. A l'étape $n = 0$, on suppose que le pion se trouve sur le point A . Ensuite, le mouvement aléatoire du pion respecte les deux règles suivantes :

- le mouvement du pion de l'étape n à l'étape $n + 1$ ne dépend que de la position du pion à l'étape n ;
- pour passer de l'étape n à l'étape $n + 1$, on suppose que le pion a une chance sur deux de rester sur place, sinon il se déplace de manière équiprobable vers l'un des deux autres points.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note A_n l'évènement "le pion se trouve en A à l'étape n ", B_n l'évènement "le pion se trouve en B à l'étape n " et C_n l'évènement "le pion se trouve en C à l'étape n ". On note également, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = P(A_n), b_n = P(B_n), c_n = P(C_n) \text{ et } V_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}.$$

1. Calculer les nombres a_n , b_n et c_n pour $n = 0$ puis $n = 1$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer a_{n+1} en fonction de a_n , b_n et c_n . Faire de même pour b_{n+1} et c_{n+1} .
3. Donner une matrice M telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $V_{n+1} = MV_n$.
4. On note $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, soit $n \in \mathbb{N}$, calculer J^n .
5. On note $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, soit $n \in \mathbb{N}$, calculer A^n .
6. On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $M^n = \frac{1}{3 \cdot 4^n} \begin{pmatrix} 4^n + 2 & 4^n - 1 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n + 2 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n - 1 & 4^n + 2 \end{pmatrix}$.
En déduire une expression de a_n , b_n et c_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
7. Déterminer les limites respectives des suites (a_n) , (b_n) et (c_n) . Interpréter le résultat.