

Cours du 27/02/2025

$M_q \quad \boxed{P} = X^{n+1} - X^n - X + 1$ est divisible par $(X-1)^2$

$\Leftrightarrow 1$ est racine de multiplicité ≥ 2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P(1) = 0 \\ P'(1) = 0 \end{cases}$$

O_n : $P(1) = 1 - 1 - 1 + 1 = 0$ Donc 1 est racine

et $P' = (n+1)X^n - nX^{n-1} - 1$

donc $P'(1) = (n+1) - n - 1 = 0$ donc 1 est racine multiple
i.e. $(X-1)^2 \mid P$

Prop 39 $(\bullet)$ α est racine multiple $\Leftrightarrow \alpha$ est racine de mult. ≥ 2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p(\alpha) = 0 \\ p'(\alpha) = 0 \end{cases}$$

(ii) Si α_1 est racine de mult. m_1 , $(X - \alpha_1)^{m_1} \mid P$
 Si α_2 ————— m_2 , $(X - \alpha_2)^{m_2} \mid P$
 $\vdots$
 Si α_q ————— m_q , $(X - \alpha_q)^{m_q} \mid P$

$$\text{Or } \forall i \neq j \quad (X - \alpha_i) \wedge (X - \alpha_j) = 1$$

$$\prod_{i=1}^g (X - \alpha_i)^{m_i} \mid P$$

Ex

Si $P = (X-1)^3 (X+2)^2$

P n'a que 2 racines :

- 1 qui est triple
- -2 qui est double

Mais en comptant avec multiplicité,

1, 1, 1, -2, -2 : 5 racines comptées
avec multiplicité

Prop 40 Si P a pour racines $\alpha_1, \dots, \alpha_g$ de mult
 $m_1, \dots, m_g$

alors $\prod_{i=1}^g (X - \alpha_i)^{m_i} \mid P$

alors comme $P \neq 0$,

$$\deg \left(\prod_{i=1}^g (X - \alpha_i)^{m_i} \right) \leq \deg(P)$$

$$= \sum_{i=1}^g m_i$$

↑ Nb de racines comptées
avec la multiplicité.

Prop 41 • Rappel si $\deg(P) = 1$ et

que $P = A \times B$ alors $\underbrace{\deg(A)}_{\in \mathbb{N}} + \underbrace{\deg(B)}_{\in \mathbb{N}} = 1$

donc $\deg(A) = 0$ et $\deg(B) = 1$ ou le contraire
donc P est irréductible

(ii) Si $\deg(P) \geq 2$, et P a une racine, notée α alors

$(X - \alpha) \mid P$ donc $\exists Q \in K[X] /$

$$P = (X - \alpha) Q$$

On a $\deg(P) = 1 + \deg(Q)$ donc $\deg(Q) \geq 1$ ainsi Q est non-constant

C'est donc une "vraie" factorisation

donc P n'est pas irréductible

Prop 42 : tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ non-constant admet
une racine complexe (ou plus)

↳ Thm. de D'Alembert - Gauss
(Admis)

Prop 43 Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non-constant

- Si $\deg(P)=1$ alors P est irréductible
- Si $\deg(P) \geq 2$, comme P a au moins une racine complexe (Thm de D'Alembert-Gauss), donc P n'est pas irréductible.

L'ensemble des irréductibles de $\mathbb{C}[X]$
est l'ensemble des polynômes de degré 1.

Prop 44
- 45

On sait que $\forall P \in \mathbb{C}[X]$, P admet une (unique)

décomp $\emptyset$ en irréductibles unitaires

$$P = \lambda \prod_{i=1}^r P_i^{m_i}$$

irréductible unitaire

Donc de degré 1

Donc de la forme
 $X - \alpha_i$

Finalement

$$P = \lambda \cdot \prod_{i=1}^r (X - \alpha_i)^{m_i}$$

Ainsi α_1 est racine de mult. m_1
 $\vdots$
 α_r est racine ——— m_r

et ce sont les seules racines

Le nombre de racines est donc $\sum_{i=1}^r m_i = \deg(P)$

Ex X^2+1 a deux racines, qui sont les 2 racines
carrées de -1 : $\pm i$

elles sont donc toutes les 2 simples et

$$X^2+1 = (X-i)(X+i)$$

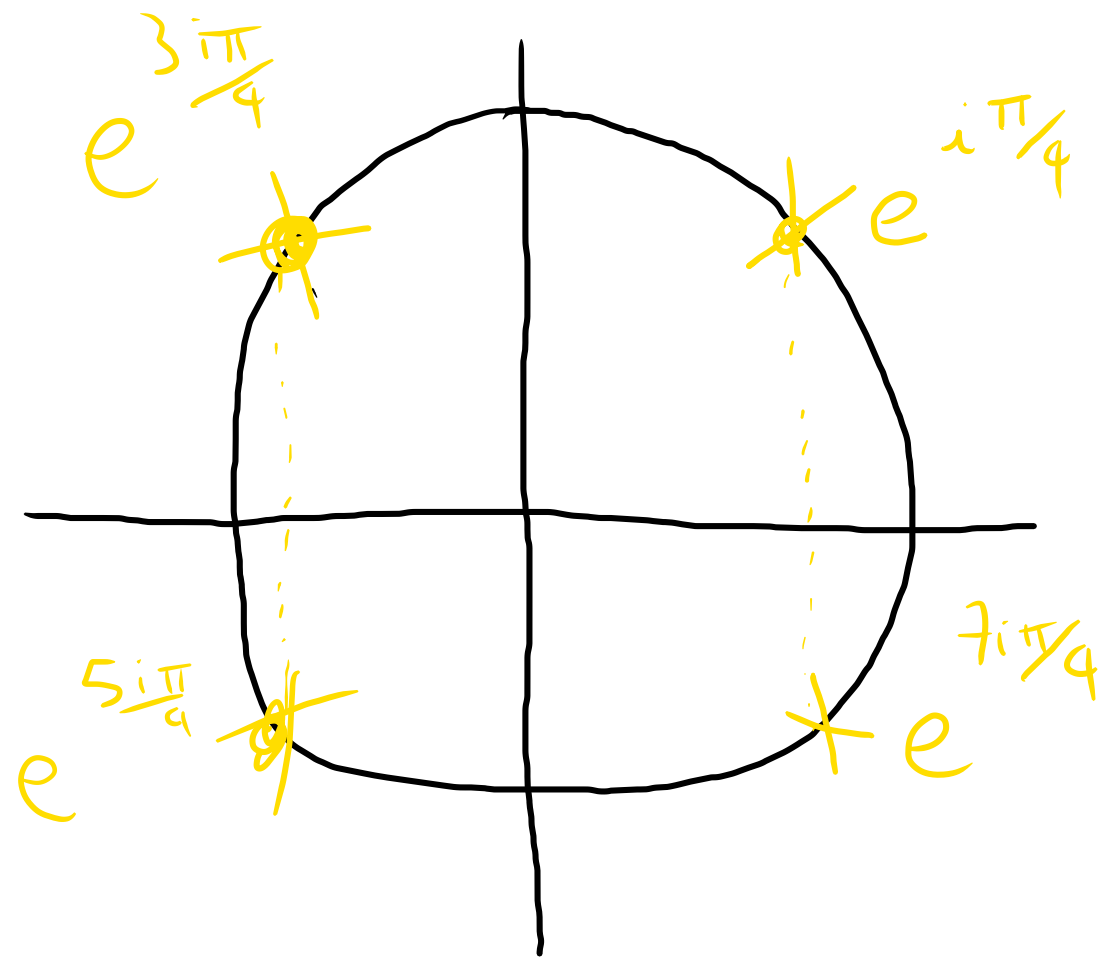
X^4+1 admet pour racines tous les complexes vérifiant $z^4 = -1 = e^{i\pi}$

$$\text{Si } z = Re^{i\theta}, z^4 = e^{i\pi} \Leftrightarrow \begin{cases} R^4 = 1 \\ 4\theta \equiv \pi [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R = 1 \\ \theta \equiv \frac{\pi}{4} \text{ ou } \frac{3\pi}{4} \text{ ou } \frac{5\pi}{4} \text{ ou } \frac{7\pi}{4} [2\pi] \end{cases}$$

$z^4 = -1$ admet 4 solutions : $e^{i\pi/4}, e^{3i\pi/4}, e^{5i\pi/4}, e^{7i\pi/4}$

Comme il y a 4 racines et que la somme de leur mult. vaut 4, elles sont toutes simples et

$$X^4 + 1 = (X - e^{i\pi/4})(X - e^{3i\pi/4})(X - e^{5i\pi/4})(X - e^{7i\pi/4})$$



Exercice : faire les 2 produits.

$$(X^4 + 2X^2 + 1) - 2X^2 = (X+1)^2 - (\sqrt{2}X)^2$$

↙ identité remarquable

Les racines de $X^n - 1$ sont les complexes

vérifiant $z^n = 1$, i.e. l'ensemble $\mathcal{U}_n$

il y en a exactement n , elles sont donc toutes simples
(sinon lorsqu'on compte avec mult. on obtiendrait un nb. $> n = \deg P$)

$$\text{Donc } X^n - 1 = \lambda \times \prod_{k=0}^{n-1} (X - e^{\frac{2ik\pi}{n}})^{m_k}$$

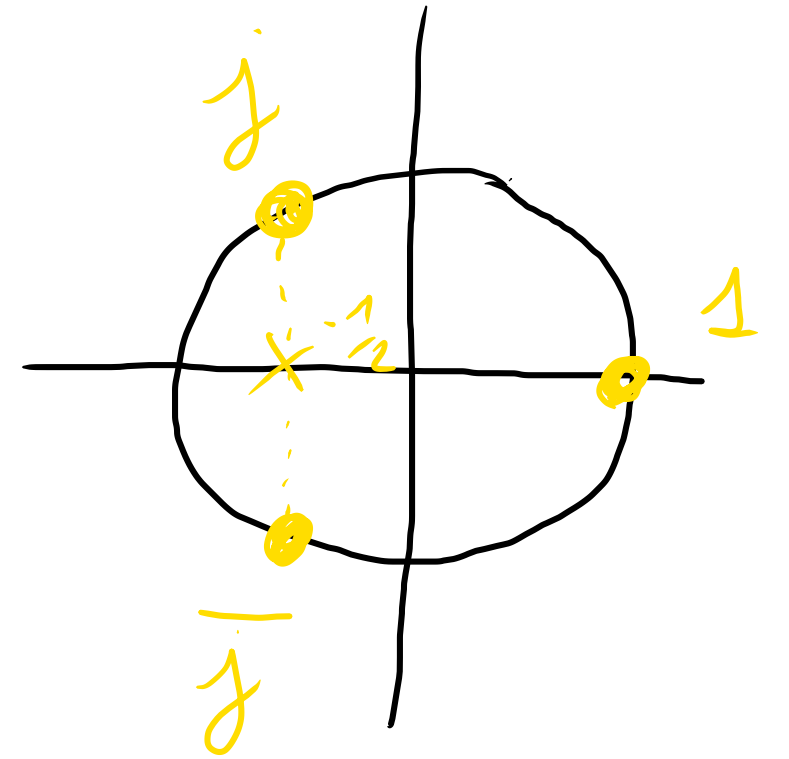
Coeff. dominant
= 1 car $X^n - 1$ est unitaire

Multiplicité de
la racine $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ = 1

Donc
$$X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (X - e^{2ik\pi/n})$$

E_x :
$$X^3 - 1 = (X - 1)(X - j)(X - \bar{j})$$

$\rightarrow X^2 - 2\operatorname{Re}(j)X + j\bar{j}$
 $= X^2 + X + 1$



Rem: la décomp^o en irred. réels sera donc

$$X^3 - 1 = (X - 1)(X^2 + X + 1)$$

Prop 47 soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$

$$\boxed{(P \in \mathbb{R}[X]) \iff (\forall k \in [0; n], \overbrace{a_k \in \mathbb{R}}^{a_k = \overline{a_k}})}$$

$$\iff \sum_{k=0}^n a_k X^k = \sum_{k=0}^n \overline{a_k} X^k$$

$$\iff \boxed{P = \overline{P}}$$

(ii) Si: $P \in \mathbb{R}[X]$ et

$$\boxed{P(z) = 0} \text{ alors}$$

$$\sum_{k=0}^n a_k z^k = 0$$

donc

$$\sum_{k=0}^n \overline{a_k z^k} = \overline{0}$$

(en prenant le conjugué)

i.e

$$\sum_{k=0}^n \overline{a_k} \bar{z}^k = 0$$

" a_k car $a_k \in \mathbb{R}$

donc

$$\underbrace{\sum_{k=0}^n a_k (\bar{z})^k}_{= P(\bar{z})} = 0$$

donc

$$\boxed{P(\bar{z}) = 0}$$

Rem: dans le cas du 2nd degré $\Delta < 0$,

On a une racine $\frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et sa conjuguée: $\frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Plus généralement

Si $\boxed{(X - \alpha)^k \mid P}$ alors $\exists Q \in \mathbb{C}[X] \text{ t. q. } P = (X - \alpha)^k Q$

donc $\overline{P} = (X - \overline{\alpha})^k, \overline{Q}$

$\parallel$
P car polynôme réel

Donc $\boxed{(X - \overline{\alpha})^k \mid P}$

Ainsi: si α est multiplicité égale à k ,
alors $(X-\alpha)^k \mid P$ et $(X-\alpha)^{k+1} \nmid P$

donc $(X-\bar{\alpha})^k \mid P$ donc $\bar{\alpha}$ est de mult. $\geq k$

Question: est-on $(X-\bar{\alpha})^{k+1} \mid P \rightarrow$ NON car sinon
on aurait
 $(X-\bar{\alpha})^{k+1} \mid P$
or $(X-\alpha)^{k+1} \nmid P$

donc $\bar{\alpha}$ est une racine de P de multiplicité exactement k .

Prop 48 Soit $P \in \mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X]$, et on note

- $\alpha_1, \dots, \alpha_q$ ses racines réelles (de mult. $m_1, \dots, m_q$)

- $z_1, \dots, z_r$ ses racines de partie imaginaires > 0
(de mult. $n_1, \dots, n_r$)

Les autres racines complexes sont donc

$\overline{z_1}$	de multiplicité	n_1
$\overline{z_2}$		n_2
$\vdots$		
$\overline{z_r}$		n_r

Donc

$$P = \lambda \prod_{i=1}^g (X - \alpha_i)^{m_i} \times \prod_{i=1}^r (X - z_i)^{n_i} \times \prod_{i=1}^r (X - \bar{z}_i)^{n_i}$$

$\uparrow$ les racines réelles
 $\uparrow$ les racines de $\text{Im} > 0$
 $\uparrow$ leurs conjuguées

La mult. de z_i et $\bar{z}_i$ est la même (prop 47) et elle est notée n_i

$$P = \lambda \prod_{i=1}^g (X - \alpha_i)^{m_i} \times \prod_{i=1}^r \left((X - z_i)(X - \bar{z}_i) \right)^{n_i}$$

$$= X^2 - (z_i + \bar{z}_i)X + z_i \bar{z}_i$$

$$= X^2 - \underbrace{2\text{Re}(z_i)}_{\beta_i} X + \underbrace{|z_i|^2}_{\gamma_i}$$

$$P = \lambda \prod_{i=1}^g (X - \alpha_i)^{m_i} \times \prod_{i=1}^r \left(\underbrace{(X - z_i)(X - \bar{z}_i)}_{= X^2 - (z_i + \bar{z}_i)X + z_i \bar{z}_i} \right)^{n_i}$$

$$= X^2 - (z_i + \bar{z}_i)X + z_i \bar{z}_i$$

$$= X^2 - \underbrace{2\operatorname{Re}(z_i)}_{\beta_i} X + \underbrace{|z_i|^2}_{\gamma_i}$$

$$P = \lambda \prod_{i=1}^g (X - \alpha_i)^{m_i} \times \prod_{i=1}^r (X^2 + \beta_i X + \gamma_i)^{n_i}$$

$\hookrightarrow$ Polynôme réel de racines z_i et $\bar{z}_i$
 donc $\Delta < 0$ c'est donc un irréductible réel

Prop 99

- On sait déjà que tout polynôme de degré 1 est irréductible.
- Tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ se décompose avec des polynômes de degré ≤ 2 , donc si $\deg(P) \geq 3$, il est factorisable par un polynôme de degré 1 ou 2 donc il n'est pas irréductible.

Et pour le degré 2 $\rightarrow$ Si P admet une racine réelle, on pourra le factoriser par $X - \alpha$ donc il n'est pas irréductible.

$\rightarrow$ Sinon, $\Delta < 0$ P n'a pas de racine réelle

en supposant que l'on ait

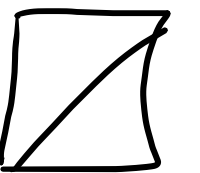
$$P = A \times B \quad \text{alors} \quad \deg(A) + \deg(B) = 2$$

donc A est constant et B de degré 2 (ou le contraire)

~~$\square \bigcirc \bullet$ A et B sont de degré 1 $\rightarrow$ Impossible car P aurait alors des racines~~

Ainsi $\bullet \Delta < 0 \Rightarrow P$ est irréductible

$\bullet \Delta \geq 0 \Rightarrow P$ n'est pas irréductible



⚠ $P \in \mathbb{R}[X]$ peut avoir des racines dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

ex $X^2 + 1 \in \mathbb{R}[X]$ de racines $\pm i$

→ Polynôme irréductible.