

Correction du DS n°6.

Durée : 4 heures - Durée minimale obligatoire : 3 heures

La calculatrice est interdite.

Question de cours - Exercices d'applications du cours

- égalité des accroissements finis
- Comme 102 et 81 sont des multiples de 3, tout entier de la forme $102x + 81y$ est multiple de 3 et ne peut donc jamais valoir 2. L'ensemble des solutions est donc vide.

Calculons le PGCD de 96 et 33.

$$\begin{aligned} 96 &= 3 \times 32 + 0 & (\text{donc } 30 &= 96 - 2 \times 33) \\ 33 &= 3 \times 11 + 0 & (\text{donc } 3 &= 33 - 3 \times 11) \\ & & &= 33 - (96 - 2 \times 33) \\ & & &= -96 + 3 \times 33 \end{aligned}$$

$$30 = 3 \times 10 + 0$$

donc $(3 \mid 96, 33) \mid 15$ car ce PGCD vaut 3.

$$\begin{aligned} \text{On a } 96x(-1) + 33 \times 3 &= 3 \\ 96x(-5) + 33 \times 15 &= 15 \end{aligned} \quad \left(\begin{array}{l} \times 5 \\ \end{array} \right)$$

Ainsi, $\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2$,

$$\begin{aligned} 96x + 33y = 15 &\Leftrightarrow 96x + 33y = 96x(-5) + 33 \times (15) \\ &\Leftrightarrow 96(x+5) = 33(15-y) \\ &\Leftrightarrow 32(x+5) = 11(15-y) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \begin{cases} 15-y = 32k \\ x+5 = 11k \end{cases}$$

car $32 \mid 11$ donc $32 \mid 11y$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \begin{cases} y = 15-32k \\ x = -5+11k \end{cases}$$

$$Y = \{(-5+11k, 15-32k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

3.

On calcule le PGCD.

$$\begin{aligned} 974 &= 9 \times 109 + 38 & 38 &= 974 - 9 \times 109 \\ 109 &= 3 \times 36 + 1 & 28 &= 109 - 3 \times 36 \\ & & &= 974 - 2 \times 109 + 15 \\ 36 &= 2 \times 18 + 0 & 10 &= 36 - 2 \times 18 \\ & & &= 974 - 1 \times 109 + 1 \times 36 \\ & & &= 974 - 3 \times 109 + 1 \times 36 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 28 &= 2 \times 10 + 8 & 8 &= 28 - 2 \times 10 \\ & & &= 974 - 2 \times 109 + 1 \times 36 \\ & & &= 974 - 3 \times 109 + 1 \times 36 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10 &= 6 \times 1 + 4 & 2 &= 10 - 6 \times 1 \\ 1 &= 2 \times 0 + 1 & &= 974 - 3 \times 109 + 1 \times 36 - 6 \times 1 \\ & & &= 974 - 3 \times 109 + 1 \times 36 - 6 \times 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Comme } 2 &= 974 - 3 \times 109 + 1 \times 36 - 6 \times 1, \\ 1 &\text{ est solution} \end{aligned}$$

4.

Exercice 1 : une usine qui fabrique des pièces

- On note A l'événement "la pièce est acceptée par le contrôle", et B l'événement "la pièce est bonne". L'événement E "Il y a une erreur au contrôle" se décompose en $A \cap \bar{B}$ et $\bar{A} \cap B$. Ces deux derniers événements sont incompatibles, on a donc : $P(E) = P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B)$.

Maintenant, $P(A \cap \bar{B}) = P(A|\bar{B})P(\bar{B})$. Or, $P(\bar{B}) = 0,05$, et $P(A|\bar{B}) = 1 - P(\bar{A}|\bar{B}) = 0,02$. De même, on a $P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}|B)P(B)$ et on a $P(\bar{A}|B) = 1 - P(A|B) = 0,04$. On obtient finalement : $P(E) = 0,95 \times 0,04 + 0,05 \times 0,02$.

2. Dans cette question, on cherche $P(\bar{B}|A)$ alors que l'on connaît les probabilités conditionnelles sachant B . Ceci nous invite à utiliser la formule de Bayes.

$$\begin{aligned} P(\bar{B}|A) &= \frac{P(\bar{B})P(A|\bar{B})}{P(B)P(A|B) + P(\bar{B})P(A|\bar{B})} \\ &= \frac{0,05 \times 0,02}{0,95 \times 0,96 + 0,05 \times 0,02} = \frac{1}{913} \simeq 0,001. \end{aligned}$$

Exercice 2 : Une équation fonctionnelle

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}(f(x) + f(y))$.

1. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax + b$. Alors $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = a\frac{x+y}{2} + b = a\frac{x+y}{2} + \frac{b+b}{2} = \frac{1}{2}((ax+b)(ay+b)) = \frac{1}{2}(f(x) + f(y))$$

2. (a) Prouvons par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$ que $f(n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En effet, on a bien $f(0) = f(1) = 0$. De plus, si $f(n) = f(n+1) = 0$, alors en appliquant la propriété avec $x = n$ et $y = n+2$, on a $\frac{x+y}{2} = n+1$ et donc

$$\underbrace{f(n+1)}_{=0} = \frac{1}{2}f(n) + \frac{1}{2}f(n+2),$$

dont on déduit $f(n+2) = 0$.

- (b) Remarquons que f est impaire. En effet, si $x \in \mathbb{R}$ et si on applique la propriété avec $y = -x$, alors $f(x) + f(-x) = 0$ ce qui prouve bien que f est impaire. Ainsi, pour tout $p \in \mathbb{Z}$, on a $f(p) = 0$.

- (c) Prouvons maintenant par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $f(p/2^n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. C'est vrai pour $n = 0$, et si c'est vrai au rang n , alors appliquons la propriété avec $x = 0$ et $y = p/2^n$. Alors $f\left(\frac{p}{2^{n+1}}\right) = 0$ ce qui prouve que la propriété est vraie au rang $n+1$.

- (d) On a, par définition de la partie entière, $2^n x_n \leq 2^n x \leq 2^n x_n + 1 \iff x - \frac{1}{2^n} \leq x_n \leq x$.

Par le théorème des gendarmes, (x_n) converge vers x .

- (e) On a, pour tout entier n , $f(x_n) = 0$ et de plus $x_n \rightarrow x$. Puisque f est continue, $f(x_n) \rightarrow f(x)$ et donc $f(x) = 0$.

3. Soit g la fonction affine telle que $f(0) = g(0)$ et $f(1) = g(1)$ et posons $h = f - g$. Alors h vérifie la propriété et vérifie également que $h(0) = h(1) = 0$. On en déduit que h est identiquement nulle, puis que $f = g$ est affine.

Exercice 3 : arithmétique

Posons $(*)$ l'équation $p^n - 1 = q^m$.

1. Si p et q sont impairs alors $p^n - 1$ est pair et q^m impair ce qui est contradictoire avec $(*)$. Par conséquent, une solution (p, q) de $(*)$ contient un entier pair et un impair. Puisque p et q sont premiers, on a $p = 2$ ou $q = 2$.

2. • $p^{n-1} + p^{n-2} + \dots + p + 1$ est la somme des termes d'une suite géométrique de raison p et de premier terme 1. Comme $p \neq 1$, on a $p^{n-1} + p^{n-2} + \dots + p + 1 = \frac{1-p^n}{1-p}$ soit $\boxed{p^n - 1 = (p-1)(p^{n-1} + p^{n-2} + \dots + p + 1)}$

• Or $q = 2$ donc $p^n - 1 = 2^m = (p-1)(p^{n-1} + p^{n-2} + \dots + p + 1)$ donc $\exists k \in \llbracket 0, m \rrbracket, p-1 = 2^k$, alors $p = 2^k + 1$. De plus il y a n termes de 1 à p^{n-1} donc $S = p^{n-1} + p^{n-2} + \dots + p + 1 \equiv n \pmod{2}$ soit S a la même parité que n et c'est aussi une puissance de 2 (éventuellement 2^0).

• Si n est impair, S est impair. Or $S = 2^{m-k}$ donc $S = 1$ et $m = k$ d'où $p^n - 1 = p - 1$ soit $p^{n-1} = 1$ donc $n = 1$. On a alors $\boxed{p = 2^m + 1}$.

Réciproquement, on vérifie bien que $(2^m - 1)^1 + 1 = 2^m$.

• Si n est pair soit $n = 2s$ avec $s \in \mathbb{N}^*$ alors $2^m = p^{2s} - 1 = (p^s)^2 - 1 = (p^s - 1)(p^s + 1)$ donc il existe $k \in \llbracket 0, m \rrbracket$, $p^s - 1 = 2^k$ et donc $p^s + 1 = 2^{m-k}$. Or $p^s + 1 = p^s - 1 + 2 = 2^k + 2$ donc $2^{k-1} + 1 = 2^{m-k-1}$; comme $2^{k-1} + 1 > 1$, on en déduit que $2^{k-1} + 1$ est multiple de 2 soit $k = 1$ d'où $p^s - 1 = 2$ et $p^s + 1 = 4$. On obtient donc $p^s = 3$ soit $\boxed{p = 3}$ et $\boxed{s = 1}$. Par conséquent, $2^m = (p^s)^2 - 1 = 8$ d'où $\boxed{m = 3}$.
Réciproquement, on vérifie bien que $3^2 - 1 = 2^3$.

3. $q^{2t} - q^{2t-1} + q^{2t-2} + \dots + q^2 - q + 1$ est la somme des termes d'une suite géométrique de raison $-q$ et de premier terme

$$1. \text{ Comme } q \neq 1, \text{ on a } q^{2t} - q^{2t-1} + q^{2t-2} + \dots + q^2 - q + 1 = \frac{1 - (-q)^{2t+1}}{1 + q}$$

$$\text{soit } \boxed{p^n = 2^n = (q+1)(q^{2t} - q^{2t-1} + q^{2t-2} + \dots + q^2 - q + 1)}$$

$$\sum_{k=0}^{2t} q^k (-1)^k \equiv \sum_{k=0}^{2t} (-1)^k [2] \text{ car } q \equiv 1 [2]. \text{ Or } \sum_{k=0}^{2t} (-1)^k = \frac{1 - (-1)^{2t+1}}{1 - (-1)} = 1 \text{ donc } \boxed{\sum_{k=0}^{2t} q^k (-1)^k \equiv 1 [2]}$$

$$\text{Donc } q+1 = 2^2 \text{ et } \sum_{k=0}^{2t} (-1)^k = 1. \text{ On en déduit que } \boxed{q = 2^n - 1} \text{ et } \boxed{t = 0} \text{ soit } \boxed{m = 1}.$$

Réciproquement, on vérifie bien que $2^n - 1 = (2^n - 1)^1$.

4. (a) $q^m + 1 = (q^{2^s})^t + 1 = (q^{2^s} + 1) \sum_{k=0}^{t-1} (-q^{2^s})^k$. On en déduit de la même façon que $q^{2^s} + 1$ est impair et que $\sum_{k=0}^{t-1} (-q^{2^s})^k$ est impair et une puissance de 2 donc $\boxed{t = 1}$.

(b) On a alors $2^n = q^{2^s} + 1$ d'où $q^{2^s} - 1 = 2^n - 2 = 2(2^{n-1} - 1)$.

(c) On a $q^{2^s} - 1 = (q^2 - 1) \sum_{k=0}^{s-1} q^{2^k}$ donc $\boxed{q^2 - 1 \text{ divise } q^{2^s} - 1}$.

$q^2 - 1 = (q-1)(q+1)$. Comme q est impair, il existe $\alpha \in \mathbb{N}$ tel que $q = 2\alpha + 1$ d'où

$q^2 - 1 = 2\alpha(2\alpha + 2) = 4\alpha(\alpha + 1)$. De plus, α et $\alpha + 1$ sont deux entiers consécutifs donc leur produit est divisible par 2. On obtient finalement $\boxed{8 \text{ divise } q^2 - 1}$.

On en déduit que 8 divise $2(2^{n-1} - 1)$ soit 4 divise $2^{n-1} - 1$ ce qui impossible.

5. Les solutions de (*) sont donc :

- $p = 2$ et $q = 2^n - 1$ si $m = 1$
- $q = 2$ et $p = 2^m + 1$ si $n = 1$
- $q = 2$ et $p = 3$ si $n = 2$ et $m = 3$

Exercice 4 : théorème de Darboux

On se propose, dans cet exercice, de démontrer le théorème de Darboux dont l'énoncé concis est le suivant :

"Soit I un intervalle et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable, f dérivable, alors $f'(I)$ est un intervalle".

1. Si f est constante alors $f' = \tilde{0}$ et donc $f'(I) = \{0\}$ qui est un intervalle.

(a) Comme $f'(a) < z$ on peut poser $\varepsilon = \frac{z - f'(a)}{2}$, et on aura bien $\varepsilon > 0$.

Par définition du nombre dérivée en a , $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$ donc il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $h \in]0, \eta[$ on ait

$$\left| \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) \right| \leq \varepsilon \text{ ce qui entraîne } \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \leq f'(a) + \frac{1}{2}(z - f'(a)) < z.$$

On fait de même en posant $\varepsilon_2 = f'(b) - z > 0$ et en remarquant $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(b+h) - f(b)}{h} = f'(b)$, on obtient qu'il existe η_2 tel que $\forall h \in]0, \eta_2[$ on ait premièrement $b + h \in I$ (comme I est ouvert, il reste un peu de place à droite de

b pour se balader sans sortir de l'intervalle, à condition que η_2 soit suffisamment petit pour ne pas en sortir) et $\frac{f(b+h)-f(b)}{h} > z$. On prend ensuite $\alpha = \min(\eta, \eta_2)$ et on peut alors affirmer

$$\exists \alpha > 0, \forall h \in]0, \alpha], \frac{f(a+h)-f(a)}{h} < z < \frac{f(b+h)-f(b)}{h}$$

- (b) On pose $\tau_h : x \mapsto \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ qui est continue car f est continue, et sur l'intervalle $[a, b]$ en choisissant α comme dans la question précédente, on a $\tau_h(a + \frac{\alpha}{2}) < z < \tau_h(b + \frac{\alpha}{2})$ donc d'après le TVI, $\exists y \in I, y + h \in I$ et $\frac{f(y+h)-f(y)}{h} = z$.
- (c) En utilisant l'EAF (dont les hypothèses ont bien été rappelées dans la question de cours) à la fonction f sur l'intervalle $[y, y+h]$, on obtient qu'il existe $x \in I$ tel que $\frac{f(y+h)-f(y)}{h} = f'(x)$ i.e. tel que $z = f'(x)$.
- (d) On vient de prouver que pour tous couple de valeur dans $f'(I)$ de la forme $f'(a) < f'(b)$, toutes les valeurs z comprise entre $f'(a)$ et $f'(b)$ s'expriment comme $f'(x)$ pour un certain $x \in I$, i.e. appartiennent à $f'(I)$. Cela prouve que $f'(I)$ est un intervalle

2. **Application :** Par l'absurde : si f était une telle fonction, alors $f'(\mathbb{R})$ serait un intervalle or si $f' = E$, on a $f'(\mathbb{R}) = \mathbb{Z}$ mais $\mathbb{Z}$ n'est pas un intervalle : cela est donc absurde.
3. **Application :** Comme f est convexe et dérivable, on sait que f' est croissante, et on veut montrer que f' est continue. Soit $a \in I$, comme f' est croissante elle admet des limites à gauche et à droite en x , et l'on sait déjà que

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f'(x) \leq f'(a) \leq \lim_{x \rightarrow a^+} f'(x)$$

Supposons que l'inégalité de gauche soit stricte, on aurait alors $\lim_{x \rightarrow a^-} f'(x) < f'(a)$. Pour une valeur $\alpha < a$ on aurait donc $f'([\alpha, a]) = [f'(\alpha), \lim_{x \rightarrow a^-} f'(x)]$ puis $f'([\alpha, a]) = [f'(\alpha), \lim_{x \rightarrow a^-} f'(x)] \cup \{f'(a)\}$: mais cela nous bouleverserait notre beau théorème de Bourdax qui affirme que $f'([\alpha, a])$ est un intervalle. Ainsi, on obtient que cela est absurde et donc $\lim_{x \rightarrow a^-} f'(x) = f'(a)$ ce qui prouve la continuité à gauche

Pour la limite à droite, de manière similaire, en supposant que $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) > f'(a)$ on aurait

$$f'([a, \beta]) = \{f'(a)\} \cup \left[\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x), f'(\beta) \right]$$

et cela n'étant pas un intervalle, on conclut de la même façon pour la continuité à droite.

On a finalement f' continue, donc f est C^1

Problème**I. Étude de f** **1. Étude de la continuité**

(a) $x \mapsto \frac{1}{x}$ et g sont définies et continues sur $] -\infty, 0[$ et $] 0, +\infty[$ donc f l'est aussi.

(b) g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$, donc g' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, g''(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} > 0 \text{ donc } \boxed{g' \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}}$$

(c) • Soit $x > 0$

g est continue sur $[0, x]$ et dérivable sur $]0, x[$. De plus, $\forall t \in]0, x[, g'(0) \leq g'(t) \leq g'(x)$.

D'après l'inégalité des accroissements finis, $\frac{1}{2}(x-0) \leq g(x) - g(0) \leq \frac{e^x}{1+e^x}(x-0)$ soit

$$\forall x > 0, \frac{x}{2} \leq g(x) \leq x \frac{e^x}{1+e^x}$$

• Soit $x < 0$

g est continue sur $[x, 0]$ et dérivable sur $]x, 0[$. De plus, $\forall t \in]x, 0[, g'(x) \leq g'(t) \leq g'(0)$.

D'après l'inégalité des accroissements finis, $\frac{e^x}{1+e^x}(0-x) \leq g(0) - g(x) \leq \frac{1}{2}(0-x)$ soit

$$\forall x < 0, \frac{x}{2} \leq g(x) \leq x \frac{e^x}{1+e^x}$$

• Soit $x = 0$ alors $\frac{x}{2} = 0 = g(0) = x \frac{e^x}{1+e^x}$

Conclusion : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \frac{x}{2} \leq g(x) \leq x \frac{e^x}{1+e^x}}$

(d) D'après l'inégalité précédente, $\forall x \in \mathbb{R}^*, \frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{e^x}{1+e^x}$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{1}{2}$ donc, d'après le théorème d'encadrement, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{2} = f(0)$.

Conclusion : $\boxed{f \text{ est continue en } 0 \text{ et donc sur } \mathbb{R}}$

2. (a) $x \mapsto \frac{1}{x}$ et g sont dérivables sur $] -\infty, 0[$ et $] 0, +\infty[$ donc f l'est aussi.

(b) g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc $g^{(3)}$ est continue sur le segment $[-1, 1]$. Donc $g^{(3)}$ est bornée c'est-à-dire $\exists M \in \mathbb{R}^+, \forall x \in [-1, 1], |g^{(3)}(x)| \leq M$

(c) • On considère les fonctions φ et Ψ définies sur $[0, 1]$ par

$$\varphi(x) = g(x) - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{M}{6}x^3 \text{ et } \Psi(x) = g(x) - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{M}{6}x^3$$

• φ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, 1]$ et $\forall x \in [0, 1], \varphi'(x) = g'(x) - \frac{1}{2} - \frac{x}{4} - \frac{M}{2}x^2$

$$\varphi''(x) = g''(x) - \frac{1}{4} - Mx \quad \text{et} \quad \varphi^{(3)}(x) = g^{(3)}(x) - M$$

D'après la question précédente, $\varphi^{(3)}(x) \leq 0$.

Donc $\varphi^{(2)}$ est décroissante sur $[0, 1]$, or $\varphi^{(2)}(0) = 0$ donc $\forall x \in [0, 1], \varphi^{(2)}(x) \leq 0$.

Donc φ' est décroissante sur $[0, 1]$, or $\varphi'(0) = 0$ donc $\forall x \in [0, 1], \varphi'(x) \leq 0$.

Donc φ est décroissante sur $[0, 1]$, or $\varphi(0) = 0$ donc $\forall x \in [0, 1], \varphi(x) \leq 0$.

- Ψ est C^∞ sur $[0, 1]$ et $\forall x \in [0, 1], \Psi'(x) = g'(x) - \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{M}{2}x^2$

$$\Psi''(x) = g''(x) - \frac{1}{4} + Mx \quad \text{et} \quad \Psi^{(3)}(x) = g^{(3)}(x) + M$$

D'après la question précédente, $\Psi^{(3)}(x) \geq 0$.

Donc $\Psi^{(2)}$ est croissante sur $[0, 1]$, or $\Psi^{(2)}(0) = 0$ donc $\forall x \in [0, 1], \Psi^{(2)}(x) \geq 0$.

Donc Ψ' est croissante sur $[0, 1]$, or $\Psi'(0) = 0$ donc $\forall x \in [0, 1], \Psi'(x) \geq 0$.

Donc Ψ est croissante sur $[0, 1]$, or $\Psi(0) = 0$ donc $\forall x \in [0, 1], \Psi(x) \geq 0$.

Finalement, on a obtenu :

$$\forall x \in [0, 1], \left| g(x) - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \right| \leq \frac{M}{6}x^3 = \frac{M}{6}|x|^3$$

- Avec la même preuve sur $[-1, 0]$ en modifiant les fonctions ϕ et Ψ et on obtient :

$$\forall x \in [-1, 1], \left| g(x) - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \right| \leq \frac{M}{6}|x|^3$$

- (d) De l'inégalité précédente, on en déduit l'encadrement $\left| \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} - \frac{1}{8} \right| \leq \frac{M}{6}|x|$

Or $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{M}{6}|x| = 0$ donc, d'après le théorème d'encadrement, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{1}{8}$.

Conclusion : f est dérivable en 0 et donc sur $\mathbb{R}$. De plus, $f'(0) = \frac{1}{8}$

3. (a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{\ln(2)}{x} + \frac{1}{x} \ln(1 + e^x) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} \ln(1 + e^x) = 0$.

Donc l'axe des abscisses et la droite d'équation $y = 1$ sont des asymptotes horizontales à la courbe C_f respectivement en $-\infty$ et $+\infty$.

- (b) h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = xg''(x)$. Comme $g'' > 0$, $h'(x)$ est du signe de x .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$		$-$	$+$
$h(x)$		$\searrow$ 0 $\nearrow$	

Donc $\forall x \in \mathbb{R}^*, h(x) > 0$. Or $\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = \frac{h(x)}{x^2} > 0$ donc f est strictement croissante.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$+$ $\frac{1}{8}$	$+$ 1
$f(x)$		$\nearrow$ 0 $\nearrow$ $\frac{1}{2}$	

II. Calculs de limites

1. (a) $\forall x \in \mathbb{R}^*, ae^{kf(kx)} = a \exp \frac{g(kx)}{x} = a \exp \frac{1}{x} \ln \left(\frac{1 + (\frac{b}{a})^x}{2} \right) = a \exp \frac{1}{x} \left(\ln \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right) - \ln(a^x) \right)$

$$= \exp \frac{1}{x} \ln \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right) = \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} = \phi(x)$$

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R}^*, \phi(x) = ae^{kf(kx)}$

(b) Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, on en déduit que φ est prolongeable par continuité en 0.

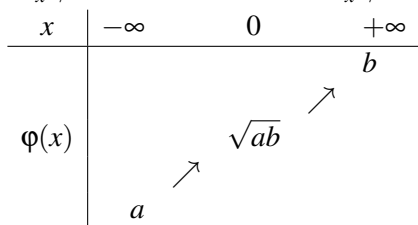
De plus $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{2}$, d'où par composition des limites on pose :

$$\varphi(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = ae^{kf(0)} = ae^{\frac{1}{2} \ln \frac{b}{a}} = a\sqrt{\frac{b}{a}} = \sqrt{ab}.$$

(c) $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\varphi'(x) = ak^2 f'(kx) e^{kf(kx)}$, comme $k > 0$, on en déduit que $\varphi'(x)$ est du signe de $f'(x)$.

De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = ae^{k.1} = b$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$

et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = ae^{k.0} = a$ car $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$



2. Si $0 < a < b$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = b = \max\{a, b\}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = \sqrt{ab}$

Si $0 < b < a$, on échange alors a et b dans la définition de φ en posant $k = \ln \frac{a}{b}$. On obtient alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{b^x + a^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = a = \max\{a, b\} \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{b^x + a^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = \sqrt{ba}$$

Conclusion : Pour tout $a > 0$ et $b > 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} = \max\{a, b\}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} = \sqrt{ab}$