

Correction du DS.5

Cours

① Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R})$.

Mq f est majorée. On raisonne par l'absurde :

Supposons que f n'est pas majorée.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in [a,b] / f(x_n) \geq n$.

La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée, donc

d'après le thm de Bolzano - Weierstrass, il existe une extraction de la suite : $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ qui est convergente. Ainsi

$$x_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x_\infty \in [a,b].$$

D'après le thm de continuité séquentielle, on obtient

$$f(x_{\varphi(n)}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x_\infty) \quad \text{or } \forall n \in \mathbb{N}$$

$$f(x_{\varphi(n)}) \geq \varphi(n) \rightarrow +\infty : \text{cela est donc absurde.}$$

On a donc : f est continue sur $[a,b] \Rightarrow f$ est majorée.

En appliquant le même raisonnement à $-f$, qui est aussi continue, on a : $(-f)$ est continue $\Rightarrow (-f)$ est majorée $\Rightarrow +f$ est minorée.

Donc finalement, f est bornée.

• On peut aussi mq f atteint ses bornes,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 5 & 8 & 1 & 9 & 3 & 7 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{On a } \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 9 & 6 & 8 & 2 & 1 & 7 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \sigma = (16384) \circ (259)$$

$$\text{Donc } \sigma^{2025} = (16384)^{2025} \circ (259)^{2025}$$

$$\text{Or } 2025 \equiv 0 [5] \text{ donc } (16384)^{2025} = \text{id}$$

$$\text{et } \begin{array}{r|l} 2025 & 3 \\ -18 & 675 \\ \hline 225 & \\ -210 & \\ \hline 15 & \\ -15 & \\ \hline 0 & \end{array} \quad \text{donc } 2025 \equiv 0 [5].$$

$$\text{Ainsi } \boxed{\sigma^{2025} = \text{id}}$$

3] Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x)^2 = 1$.

On a alors $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 1 \text{ ou } -1$.

Analyse, soit f une telle fonction.

Supposons qu'elle n'est pas constante.

Alors $\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2 / f(a) \neq f(b)$ mais comme les deux seules valeurs possibles de f sont $+1$ et -1 , on a $f(a) = -1$ ou le contraire i.e $f(a) = +1$ et $f(b) = -1$
 $f(b) = +1$

en appliquant le T.V.I à f qui est continue sur l'intervalle $[a, b]$ (voire $[b, a]$ si $b < a$) la valeur 0 étant comprise

entre -1 et 1 qui sont les valeurs de $f(a)$ et $f(b)$,
on a : $\exists c$ compris entre a et b / $f(c) = 0$.

Absurde ! Car alors on a $f(c)^2 = 0$ alors que
l'énoncé affirmait que $f^2 = 1$.

Ainsi f est constante, et comme les 2 seules valeurs
possibles sont -1 ou 1 , on a 2 possibilités.

$$f = \tilde{1} \text{ ou } f = -\tilde{1}$$

Synthèse : dans ces 2 cas on aura $f^2 = \tilde{1}$.

Donc ce sont les 2 seules solutions.

Exercice : un grand classique de l'agrégation
"Montrer que A_5 est simple"

1] On a $\text{Card}(S_5) = 5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$
et $\text{Card}(A_5) = \frac{5!}{2} = 60$.

2] Toutes les transpositions sont de signature -1 ,
donc aucune n'appartient à A_5 .
Choisir une transposition revient à choisir les 2 éléments
qu'elle intervertit, il y en a donc $\binom{5}{2}$.

Dups, c'est le 4

$$\boxed{\text{Card}(H_2) = \binom{5}{2} = \frac{5 \times 4}{2} = 10}$$

~~3]~~ Tous les 3-cycles sont de signature $(-1)^{3-1} = +1$ donc ce
sont des éléments de A_5 .

Choisir un 3-cycle consiste à :

• choisir son support $\{a, b, c\}$: il y a pour cela $\binom{5}{3} = \binom{5}{2} = 10$ choix

• Fixer une valeur parmi $\{a, b, c\}$ (disons a) que l'on

décide de placer en tête dans l'écriture du cycle, il reste alors 2 choix: le cycle $(a b c)$ ou le cycle $(a c b)$.

$$\rightarrow \text{Donc } \boxed{\text{Card}(H_3) = \binom{5}{3} \times 2! = 20}$$

3] Si $\sigma = (ab)(cd)$ alors $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon((ab)) \times \varepsilon((cd))$
 $= -1 \times -1 = +1$

Donc $\sigma \in A_5$.

Pour choisir une telle permutation il faut:

- choisir $\{a, b\}$: $\binom{5}{2}$ choix possibles
- choisir $\{c, d\}$: $\binom{3}{2}$ choix possibles (car il ne reste que 3 nombres dans $[1, 5] \setminus \{a, b\}$)

Et prendre en compte que chaque configuration a été comptée 2 fois car $(ab)(cd) = (cd)(ab)$.

Cela donne donc

$$\boxed{\text{Card}(H_{2,2}) = \frac{\binom{5}{2} \times \binom{3}{2}}{2} = \frac{10 \times 3}{2} = 15}$$

5] Si $\sigma = (abcd)$ est un 4-cycle, sa signature vaut $(-1)^{4-1} = -1$ donc $\sigma \notin A_5$

Choisir un tel cycle revient à

- Choisir les 4 éléments du support $\{a, b, c, d\}$: il y a $\binom{5}{4} = 5$ choix possibles
- Fixer un élément que l'on place en tête dans l'écriture du cycle, on le note a . Le cycle pourra alors s'écrire $(a b c d)$ ou $(a d c b)$
 ou $(a b d c)$ ou $(a c b d)$
 ou $(a d b c)$ ou $(a c d b)$

en effet, il s'écrit : a suivi d'une permutation des 3 valeurs b, c et d .

Cela représente $3! = 6$ cycles dont le support est $\{a, b, c, d\}$.

$$\text{On a donc } \boxed{\text{Card}(H_4) = \binom{5}{4} \times 3! = 5 \times 6 = 30}$$

6] Si σ est un 5-cycle sa signature est $(-1)^{5-1} = +1$ donc $\sigma \in A_5$.

Pour choisir une telle permutation, le support est obligatoirement $[1, 5]$ et l'on peut décider de placer le début du cycle à 1.

On peut ensuite écrire le cycle sous la forme

$$\sigma = (1 a b c d) \text{ où } a, b, c \text{ et } d$$

sont une permutation des 4 valeurs 2, 3, 4 et 5.

Il y a donc $4!$ 5-cycles i.e

$$\boxed{\text{Card}(H_5) = 4! = 24}$$

7] Si $\sigma = (abc)(de)$ sa signature

$$\text{vaut } (-1)^{3-1} \times (-1)^{2-1} = -1 \text{ donc } \sigma \notin A_5.$$

Pour former une telle permutation, il faut

former un 3-cycle : 20 choix, puis il n'y

a ensuite plus qu'un seul choix possible vu qu'il ne

reste que 2 entiers pour former la transposition (de)

$$\text{donc } \boxed{\text{Card}(H_{3,2}) = 20}$$

8] La décomposition en cycle à supports disjoints étant unique, les ensembles $H_2, H_3, H_4, H_5; H_{2,2}$ et $H_{3,2}$ sont 2 à 2 disjoints. On a donc

$$\text{Card} (H_2 \sqcup H_3 \sqcup H_4 \sqcup H_5 \sqcup H_{2,2} \sqcup H_{3,2}) \\ = 10 + 20 + 30 + 24 + 15 + 20 = 119$$

or $\text{Card} (Y_5) = 120$.

Il ne nous manque donc qu'une seule permutation. Mais qui a-t-on bien pu oublier? Mais c'est l'identité bien sûr! Son support étant vide elle ne fait partie d'aucun des ensembles précédents.

On a donc

$$Y_5 = \{id\} \sqcup H_2 \sqcup H_3 \sqcup H_4 \sqcup H_5 \sqcup H_{2,2} \sqcup H_{3,2}$$

et $A_5 = \{id\} \sqcup H_3 \sqcup H_5 \sqcup H_{3,2}$

(rem: $\text{Card} (A_5) = 60 = 1 + 20 + 24 + 15$: le compte est bon!)

9] G peut donc s'écrire comme union disjointe des sous-ensemble $\{id\}, H_3, H_5$ et $H_{2,2}$ (en effet, $H_2 \not\subset A_5$ idem pour H_4 et $H_{3,2}$)

Son cardinal est donc une somme de 4 nb

1; 20; 24 et 15.

Les diviseurs de 60 sont 1, 2, 3, 4, 5, 12, 15, 20, 30 et 60.

Si G contient H_5 son cardinal est donc

$25 +$ une somme de nombres à choisir parmi

1, 20 et 15 : cela vaut 26 ou est supérieur à 30,

la seule manière de diviser 60 est donc de valoir 60.

Si G ne contient pas H_5 son cardinal est donc une

somme des nombres 1, 20 et 15 qui doit diviser 60

La seule possibilité est : 1.

Conclusion :

$$G = \{id\}$$

ou

$$G = A_5$$

Exercice

1] À l'étape $n=0$, le pion est en A, donc

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ b_0 = 0 \\ c_0 = 0 \end{cases} \quad \text{Il y a une chance sur 2 qu'il y reste}$$

à l'étape 1, et $\frac{1}{4}$ qu'il aille vers B, autant de chances d'aller vers C donc

$$\begin{cases} a_1 = \frac{1}{2} \\ b_1 = \frac{1}{4} \\ c_1 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

2] Soit $n \in \mathbb{N}$, comme à l'instant n le pion est en un et un seul sommet parmi A, B ou C, on a :
 (A_n, B_n, C_n) forme un système complet d'événements.
En utilisant la formule des probabilités totales avec ce S.C.E on trouve

$$P(A_{n+1}) = P(A_n) \times \underbrace{P(A_{n+1}|A_n)}_{=\frac{1}{2} : \text{fair du "sur-place"}} + P(B_n) \times \underbrace{P(A_{n+1}|B_n)}_{=\frac{1}{4}} + P(C_n) \times \underbrace{P(A_{n+1}|C_n)}_{=\frac{1}{4}}$$

$$\text{i.e. } a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n + \frac{1}{4} b_n + \frac{1}{4} c_n.$$

On trouve aussi :

$$P(B_{n+1}) = P(A_n) \times \underbrace{P(B_{n+1}|A_n)}_{=\frac{1}{4}} + P(B_n) \times \underbrace{P(B_{n+1}|B_n)}_{=\frac{1}{2}} + P(C_n) \times \underbrace{P(B_{n+1}|C_n)}_{=\frac{1}{4}}$$

$$\text{Donc } b_{n+1} = \frac{1}{4} a_n + \frac{1}{2} b_n + \frac{1}{4} c_n$$

enfin, on trouve

$$P(C_{n+1}) = P(A_n) \times \underbrace{P(C_{n+1}|A_n)}_{= \frac{1}{4}} + P(B_n) \times \underbrace{P(C_{n+1}|B_n)}_{= \frac{1}{4}} + P(C_n) \times \underbrace{P(C_{n+1}|C_n)}_{= \frac{1}{2}}$$

D'où $c_{n+1} = \frac{1}{4} a_n + \frac{1}{4} b_n + \frac{1}{2} c_n$.

On a donc

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} a_n + \frac{1}{4} b_n + \frac{1}{4} c_n \\ \frac{1}{4} a_n + \frac{1}{2} b_n + \frac{1}{4} c_n \\ \frac{1}{4} a_n + \frac{1}{4} b_n + \frac{1}{2} c_n \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$

d'où $V_{n+1} = M V_n$ avec

$$M = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

4 Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ on a $J^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3J$

puis $J^3 = J^2 \times J = 3J \times J = 3J^2 = 9J$.

On conjecture que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $J^n = 3^{n-1} J$.
P.C.I. :=

Initialisation : $J^1 = J$
 $3^{1-1} J = 3^0 J = J$ } cela prouve $P(1)$

Hérédité soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose $\mathcal{P}(n)$,

alors

$$\boxed{J^{n+1}} = J^n \times J = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{D'après} \\ \mathcal{P}(n)}}}{3^{n-1} J} \times J = \underset{\substack{\uparrow \\ 3J}}{3^{n-1} J^2} = \boxed{3^n J}$$

ce qui prouve $\mathcal{P}(n+1)$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a $J^n = 3^{n-1} J$.

et si $n=0$, on a $J^0 = I_3$

5] On remarque que $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = I + J$
or I et J commutent donc d'après la formule du binôme, $\forall n \in \mathbb{N}$ on a

$$\boxed{A^n = (I + J)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \underbrace{J^k}_{\substack{\text{ } \\ \left\{ \begin{array}{l} 3^{k-1} J \text{ si } k \neq 0 \\ I_3 \text{ sinon} \end{array} \right.}} \times I^{n-k}}$$

$$= \binom{n}{0} \times I_3 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 3^{k-1} J$$

$$= I_3 + \frac{1}{3} \left(\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 3^k \right) J$$

$$= I_3 + \frac{1}{3} \left((3+1)^n - 1 \right) J$$

$$= \boxed{I_3 + \frac{1}{3} (4^n - 1) J}$$

6] Comme $M = \frac{1}{2} A$, on a $\forall n \in \mathbb{N}$

$$M^n = \frac{1}{2^n} A^n \text{ ce qui explique le résultat}$$

(et si l'on était un peu roublard, en remplaçant n par 1 dans la formule on retrouverait M pour vérifier notre réponse à la Q.3)

On a $\forall n \in \mathbb{N}, V_{n+1} = M V_n$ donc par récurrence sur $n, \forall n \in \mathbb{N}, \text{ "H(n)"}: V_n = M^n V_0$

Initialisation on a $M^0 V_0 = I_3 \cdot V_0 = V_0$ ce qui prouve $\text{H}(0)$

Hérédité soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose $\text{H}(n)$.

$$\text{On a : } \underline{V_{n+1}} = M \underbrace{V_n}_{\substack{\text{D'après} \\ \text{H}(n)}} = M \times \underline{M^n V_0} = \underline{M^{n+1} V_0} \quad \text{ce qui prouve } \text{H}(n+1)$$

Conclusion $\forall n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \frac{1}{3 \cdot 4^n} \begin{pmatrix} 4^{n+2} & 4^{n+1} & 4^{n-1} \\ 4^{n-1} & 4^{n+2} & 4^{n-1} \\ 4^{n-1} & 4^{n-1} & 4^{n+2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3 \cdot 4^n} \begin{pmatrix} 4^{n+2} \\ 4^{n-1} \\ 4^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{2}{3 \cdot 4^n} \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot 4^n} \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{4^n} \end{pmatrix}$$

7] On a donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = \frac{1}{3}.$$

Interprétation: au bout d'un très grand nombre d'étapes,
le système tend vers une situation d'équiprobabilité.