

Correction du DM n°5.

Des matrices et des permutations

1. Soient σ et σ' deux éléments de S_n . Soit $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$. Le coefficient ligne i , colonne j de $P_\sigma P_{\sigma'}$ vaut

$$\sum_{k=1}^n \delta_{i, \sigma(k)} \delta_{k, \sigma'(j)} = \delta_{i, \sigma(\sigma'(j))}$$

et est donc aussi le coefficient ligne i , colonne j de la matrice $P_{\sigma \circ \sigma'}$. Par suite,

$$\forall (\sigma, \sigma') \in (S_n)^2, P_\sigma \times P_{\sigma'} = P_{\sigma \circ \sigma'}$$

(b) Soit $\sigma \in S_n$. D'après a), $P_\sigma P_{\sigma^{-1}} = P_{\sigma \circ \sigma^{-1}} = P_{Id} = I_n = P_{\sigma^{-1}} P_\sigma$. On en déduit que toute matrice P_σ est inversible, d'inverse $P_{\sigma^{-1}}$. Par suite, $G \subset GL_n(\mathbb{R})$ (et clairement, $G \neq \emptyset$). Soit alors $(\sigma, \sigma') \in (S_n)^2$.

$$P_\sigma P_{\sigma'}^{-1} = P_\sigma P_{\sigma'^{-1}} = P_{\sigma \circ \sigma'^{-1}} \in G$$

On a montré que G est un sous-groupe de $(GL_n(\mathbb{R}), \times)$. Soit $\varphi : S_n \rightarrow G$. D'après a), φ est un morphisme de groupes. φ est clairement surjectif. Il $\sigma \mapsto P_\sigma$ reste à vérifier que φ est injectif. Soit $\sigma \in S_n$.

$$\begin{aligned} \sigma \in \text{Ker } \varphi &\Rightarrow P_\sigma = I_n \Rightarrow \forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, \delta_{i, \sigma(j)} = \delta_{i, j} \\ &\Rightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\}, \delta_{i, \sigma(i)} = 1 \Rightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\}, \sigma(i) = i \\ &\Rightarrow \sigma = Id. \end{aligned}$$

Puisque le noyau du morphisme φ est réduit à $\{Id\}$, φ est injectif. Ainsi, φ est un isomorphisme du groupe $(S_n, \circ)$ sur le groupe $(G, \times)$ et on a montré que $(G, \times)$ est un sous-groupe de $(GL_n(\mathbb{R}), \times)$, isomorphe à $(S_n, \circ)$. 2. Soit $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$. Le coefficient ligne i , colonne j de AP_σ vaut:

$$\sum_{k=1}^n a_{i, k} \delta_{k, \sigma(j)} = a_{i, \sigma(j)}$$

Ainsi, l'élément ligne i , colonne j , de AP_σ est l'élément ligne i , colonne $\sigma(j)$, de A , ou encore, si j est un élément donné de $\{1, \dots, n\}$, la j -ème colonne de AP_σ est la $\sigma(j)$ -ème colonne de A . Ainsi, si on note $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A (et donc $A = (C_1, \dots, C_n)$), alors $AP_\sigma = (C_{\sigma(1)}, \dots, C_{\sigma(n)})$. En clair, multiplier A par P_σ à droite a pour effet d'appliquer la permutation σ aux colonnes de A (puisque P_σ est inversible, on retrouve le fait que permuter les colonnes de A ne modifie pas le rang de A).

Le Rubik's race



Le jeu du Rubik's Race est un support carré de 5×5 cases qui sont toutes occupées par un jeton de couleur sauf une case qui est laissée vide (ce qui permet de faire bouger les jetons, et donc de jouer). Il y a 6 couleurs : **B**leu, **J**aune, **R**ouge, **V**ert, blanc, **O**range, et chaque couleur comporte 4 jetons (on a bien $5^2 = 4 \times 6 + 1$). On appelle "motif" la donnée de la liste des couleurs sur chaque cases. Le grand carré possède un haut et un bas, et l'on considère que deux motifs sont identiques lorsque leurs photos sont identiques.

1. Combien y a-t-il de motifs possibles ?

On applique ensuite un "masque" qui cache les cases extérieures pour ne faire apparaître que les 9 jetons centraux. Un "sous-motif" correspond à un carré de 9 couleurs (avec aucune case vide), que l'on représente par une matrice de couleurs.

2. Combien y a-t-il de motifs qui laissent apparaître le sous-motif

$$\begin{pmatrix} \text{Bleu} & \text{Bleu} & \text{Vert} \\ \text{Rouge} & \text{Jaune} & \text{Vert} \\ \text{Rouge} & \text{Orange} & \text{Blanc} \end{pmatrix}$$

3. Combien y a-t-il de motifs qui laissent apparaître le sous-motif

$$\begin{pmatrix} \text{Bleu} & \text{Bleu} & \text{Vert} \\ \text{Rouge} & \text{Jaune} & \text{Bleu} \\ \text{Rouge} & \text{Orange} & \text{Blanc} \end{pmatrix}$$

4. Un joueur tire un à un les jetons de manière aléatoire et les place sur support carré, et décide également de manière aléatoire de laisser un emplacement vide. Il baisse ensuite le masque.

(a) Avec quelle probabilité obtiendra-t-il le premier sous-motif ?

(b) Avec quelle probabilité obtiendra-t-il le second sous-motif ?

5. Le joueur a aperçu que la case en plein centre du jeu était jaune. Quelle est alors la probabilité qu'il obtienne le premier sous-motif ?