TD 15 : Probabilités sur un univers fini

Probabilités simples

Ex 1 Happy birthday to you !
Lors d'une cérémonie marquant son départ en retraite, qui regroupe une cinquantaine de personnes, le célèbre professeur Eddy OHAZAR affirme à la stupéfaction de son auditoire : « Je suis presque certain que deux d'entre vous ont le même jour d'anniversaire ». Qu'en pensez-vous ?
La probabilité de l'événement contraire est la probabilité que les dates d'anniversaires des 50 personnes soit un arrangement. Donc $\frac{\frac{365!}{315!}}{365^5 0}$

Ex 2 Une anomalie au poker
Une quinte floche est constituée de 5 cartes consécutives d'une même couleur. Suivant la règle du jeu, les annonces au poker classées de la plus forte à la plus faible sont : la quinte floche, le carré, la couleur, le full, la quinte et le brelan. Déterminer pour chaque annonce sa probabilité. Une annonce doit être d'autant plus forte qu'elle est rare; cette règle est-elle respectée ?

Ex 3 On jette trois fois un dé cubique parfait dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On note a, b et c les numéros obtenus. Soit $Q(x) = ax^2 + bx + c$. Déterminer la probabilité pour que le polynôme Q

1. ait 2 racines réelles distinctes. Cela survient ssi $\underline{\ }2 - 4ac > 0$ ce qui survient pour $b = 3$ et (a, c) pouvant prendre 3 valeurs possibles, ou $b = 4$ et (a, c) pouvant prendre 11 valeurs, ou encore $b = 5$, le couple (a, c) peut prendre 14 valeurs, ou enfin $b = 6$ et (a, c) peut prendre 16 valeurs possibles.
2. ait une racine réelle double.Possible ssi $(a, b, c) = (1, 2, 1)$ ou $(1, 4, 4)$ ou $(4, 4, 1)$ ou encore $(3, 6, 3)$
3. n'ait pas de racine réelle.1-l a somme des deux probabilités trouvées précédemment

Ex 4 Soit $n \geqslant 4$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n.

1. On place les n boules, au hasard, dans n boîtes numérotées de 1 à n, chaque boîte pouvant contenir de 0 à n boules.
   (a) Quel est le nombre de dispositions possibles ? Choisir une disposition revient précisément à déterminer une fonction attribuant à chaque boule le numéro d'une urne. Donc n^n
   (b) Soit E_n l'événement « chaque boîte contient exactement une boule » et p_n sa probabilité. Calculer p_n.
2. Démontrer directement à l'aide de la formule du binôme l'inégalité de Bernoulli
$$\forall x \geqslant 0,\ (1+x)^n \geqslant 1 + nx$$
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{p_n}{p_{n+1}} \geqslant 2$.
4. Déterminer $\lim_{n \to +\infty} p_n$.

Ex 5 On considère n équipes de football de $L1$ et n équipes de $L2$. On tire au sort n rencontres entre ces $2n$ équipes (chaque équipe joue un match et un seul).

1. Calculer la probabilité p_n pour que tous les matchs opposent une équipe de $L1$ à une équipe de $L2$. dénombrer le nombre de configurations n'opposants que des équiês de L1 à des équipes de L2 ; dénombrer le nombre de configurations total
2. Calculer la probabilité q_n pour que tous les matchs opposent 2 équipes de la même division. Encore du dénombrement. Remarquer que si n est impair cela est impossible, et si $n = 2k$, le dénombrement à faire fonctionne comme dans la question 1, mais avec l'entier k cette fois-ci
3. Montrer que
$$\forall n \geqslant 1,\ \frac{2^{2n-1}}{n} \leqslant \binom{2n}{n} \leqslant 2^{2n}$$

4. Calculer $\lim_{n\to+\infty} p_n$ et $\lim_{n\to+\infty} q_n$.

Ex 6 Loterie

Soit $n \geqslant 3$. On réalise une loterie en plaçant dans une urne n billets différents dont deux, et deux seulement, sont gagnants. Un joueur décide d'acheter deux billets et l'organisateur de la loterie lui laisse le choix entre deux méthodes :

– Choisir simultanément deux billets dans l'urne.
– Choisir un premier billet, prendre connaissance du résultat puis remettre ce billet dans l'urne avant de tirer le second.

1. Calculer la probabilité p_n d'avoir exactement un billet gagnant parmi les deux choisis en effectuant un tirage simultané.
2. Calculer la probabilité q_n d'avoir exactement un billet gagnant parmi les deux choisis en effectuant deux tirages successifs avec remise.
3. Comparons p_n et q_n.
   (a) Démontrer que
   $$\forall n \geqslant 3,\ p_n - q_n = \frac{4(n-2)}{n^2(n-1)}$$
   (b) Pour obtenir exactement un billet gagnant quelle est la méthode la plus favorable au joueur ?
   (c) Déterminer un entier n_0 à partir duquel $p_n - q_n < 10^{-3}$.

Probabilités conditionnelles et indépendances

Ex 7 Un sac contient 3 jetons. L'un de ces jetons a 2 faces noires, un autres 2 faces blanches et le troisième a une face noire et une face blanche.
On tire au hasard un jeton du sac et on le pose sur la table. La face visible est noire. Quelle est la probabilité que le jeton tiré ait 2 faces noires ? On a d'abord événements : A : avoir le jeton complètement blanc, B avoir celui bicolore, et C avoir celui noir. Ensuite, on définit N : la face visible est noir, dont le complémentaire $\overline{N}$: la face visible est blanche. utiliser ensuite la formule de Bayes

Ex 8 Marche aléatoire sur un carré

$ABCD$ est un carré de centre O. Un jeton posé sur l'un des cinq points peut se déplacer de façon aléatoire vers l'un des autres voisins suivant le mode suivant : tous les pas issus de l'un sommets A, B, C et D ont pour probabilité $\frac{1}{3}$ et tous les pas issus de O ont une probabilité de $\frac{1}{4}$. Un chemin est une suite de pas successifs. Au départ le jeton est en A.

1. Le jeton fait deux pas. Calculer la probabilité qu'il arrive en A, en B, en C, en D, en O ? Utiliser la F.P.T avec le sce A_1, B_1, V_1, D_1, O_1
2. Il fait un pas de plus. Quelle est la probabilité qu'il arrive en O ? Utiliser la F.P.T avec le sce $O_3, \overline{O_2}$ ou (mais c'est plus long) avec $(A_2, B_2, C_2, D_2, O_2)$
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note p_n la probabilité pour que le jeton arrive en O après n pas. Démontrer que
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ p_{n+1} = \frac{1}{3}(1 - p_n)$$
   Utiliser la F.P.T avec le sce $O_n, \overline{O_n}$
4. Expliciter p_n en fonction de n et déterminer $\lim_{n\to+\infty} p_n$. Suite arithmético géométrique

Ex 9 Une urne contient b boules blanches et r boules rouges.
On tire n boules en remettant la boule après le tirage si elle est rouge et en ne la remettant pas si elle est blanche.
Quelle est la probabilité p d'obtenir exactement une boule blanche en n tirages ? Noter B_k l'événement "le k eme tirage est une boule blanche". L'événement A en question est l'union disjointe des événements suivant :
A_1 : avoir une boule blanche au premier tirage puis que des rouges par la suite

A_2 : avoir une boule blanche au deuxième tirage et que des rouges aux autres tirages
...
A_n avoir une boule blanche au n-ème tirage et que des rouges aux autres tirages Pour connaître la probabilité de A_k, il faut le décrire proprement comme une intersection et utiliser la FPC

Ex 10 Contrôle antidopage

Les statistiques ont permis d'établir qu'en période de compétition, pour un sportif pris au hasard, la probabilité d'être déclaré positif au contrôle antidopage est égale à 0,02.
La prise d'un médicament m peut entrainer, chez certains sportifs, un contrôle antidopage positif. En période de compétition, ce médicament, qui diminue fortement les effets de la fatigue musculaire, est utilisé par 25% des sportifs.
Pour un tel sportif, la probabilité d'être déclaré positif au contrôle antidopage est alors de $0,05$.
Pour un sportif choisi au hasard en période de compétition, on note M et P les événements

$$M = \text{« utiliser le médicament } m \text{ »} \quad \text{et} \quad P = \text{« être déclaré positif au contrôle antidopage »}$$

1. Traduire l'énoncé à l'aide des événements M et P.

2. En déduire la probabilité de l'événement « utiliser le médicament m et être déclaré positif au contrôle antidopage ». Utilise rla formule de Bayes

3. Pour un sportif choisi au hasard en période de compétition calculer les probabilités suivantes

$$\mathrm{P}_P(M) \quad \text{et} \quad \mathrm{P}_{\overline{M}}(P)$$

Ex 11 Circuit électronique

On dispose de 3 composants électroniques C_1, C_2 et C_3 dont la probabilité de fonctionnement est respectivement p_1, p_2 et p_3, et de fonctionnement totalement indépendant les uns des autres. Donner la probabilité de fonctionnement du circuit

1. si les composants sont disposés en série. F : le circuit fonctionne. F_k : le composant k fonctionne. Écrire F comme une intersection

2. si les composants sont disposés en parallèle. Ecrire F comme une union. Il est peut être plus simple de calculer la probabilité de son contraire, $\overline{F}$!

3. si le circuit est mixte : C_1 est disposé en série avec le sous-circuit constitué de C_2 et C_3 en parallèle. Décrire l'événement à l'aide de F_1, F_2 et F_3

Ex 12 Marche aléatoire sur un segment

Une particule se trouve à l'instant 0 au point d'abscisse $a \in \mathbb{N}$, sur un segment gradué de 0 à N (on suppose donc $0 \leqslant a \leqslant N$). A chaque instant, elle fait un bond de $+1$ avec la probabilité $p \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$, ou un bond de -1 avec la probabilité $q = 1-p$; chaque bond est indépendant du bond précédent. Autrement dit, si x_n est l'abscisse de la particule à l'instant n, on a :

$$x_{n+1} = \begin{cases} x_n + 1 & \text{avec la probabilité } p \\ x_n - 1 & \text{avec la probabilité } 1-p \end{cases}$$

Le processus se termine lorsque la particule atteint une des extrémités du segment (i.e. s'il existe x_n avec $x_n = 0$ ou $x_n = N$).

1. On note u_a la probabilité pour que le processus s'arrête en 0, la particule partant de a.
   (a) Que vaut u_0 ? u_N ?
   (b) Montrer que si $0 < a < N$, alors $u_a = pu_{a+1} + qu_{a-1}$.
   (c) En déduire l'expression exacte de u_a en fonction de a, N, p et q.

2. On note v_a la probabilité pour que le processus s'arrête en N, la particule partant de a.
   Reprendre les questions précédentes avec v_a au lieu de u_a.

3. Calculer $u_a + v_a$. En déduire la probabilité que le processus ne s'arrête pas.

4. Écrire un algorithme en Python qui simule cette marche aléatoire. En particulier, cet algorithme prendra en entrée l'abscisse a de départ, la longueur N du segment, et produira en sortie un message indiquant si la marche s'arrête en 0 ou en N, et le nombre de pas nécessaires pour que le processus s'arrête.