TD 14 : Dénombrement et groupe symétrique

Jeux

Ex 1 Une urne contient 15 boules numérotées de 1 à 15. Les boules numérotées de 1 à 5 sont blanches et de 6 à 15 sont noires.

1. On tire simultanément 5 boules de l'urne. Combien y a-t-il tirages possibles ? Combien de tirages donnent 2 boules blanches et 3 boules noires.
2. On tire successivement 5 boules de l'urne sans remise. Combien y a-t-il tirages possibles en tenant compte de l'ordre ? Combien de tirages donnent 2 boules blanches et 3 boules noires dans un ordre quelconque.

Ex 2 On lance quatre fois un dé. On appelle « tirage » la suite de ces 4 lancers.

1. Combien y a-t-il de tirages différents ?
2. Combien y a-t-il de tirages avec exactement deux numéros différents ?
3. Combien y a-t-il de tirages avec exactement trois numéros différents ?

Ex 3 Poker
On considère un jeu de 52 cartes réparties en 4 couleurs $\spadesuit, \heartsuit, \clubsuit, \diamondsuit$. Chacune de ces couleurs est constituée de 13 hauteurs : du 2 au 10, valet, dame, roi et as. Dans ce jeu de 52 cartes, on choisit simultanément 5 cartes appelées « une main ».

1. Déterminer le nombre total de mains.
2. Déterminer le nombre de mains qui contiennent un carré (4 cartes de même hauteur).
3. Déterminer le nombre de mains qui contiennent au moins un trèfle.
4. Déterminer le nombre de mains qui contiennent un brelan d'as (3 as exactement).
5. Déterminer le nombre de full (un brelan et une paire).
6. Déterminer le nombre de mains qui contiennent exactement un roi et un coeur.
7. Déterminer le nombre de quintes (5 cartes qui se suivent sans être de la même couleur).
8. Déterminer le nombre de couleurs (5 cartes de la même couleur qui ne se suivent pas).

Dénombrement sur les mots

Ex 4 On appelle mot toute suite de lettres qu'elle ait un sens ou non. Déterminer le nombre de mots de

1. quatre lettres. 4-listes : 26^4
2. quatre lettres distinctes. Arrangements : $\frac{26!}{22!}$
3. quatre lettres distinctes ayant une voyelle. Complémenataire de l'ensemble des mots formés sur les 20 consonnes, donc $26^4 - 20^4$
4. quatre lettres distinctes ayant une seule voyelle et les 3 consonnes ne sont pas consécutives.de la forme CVCC ou CCVC, donc $2 \times 20^3 \times 6$

Ex 5 Anagrammes
Combien peut-on écrire d'anagrammes des mots : CHIEN, CHASSE, MARCASSINS, ANAGRAMMES ? Proposer une formule pour un mot constitués de n lettres. Attention, lorsqu'une lettre se répète, ne pas compter deux fois ABB et ABB (vous ne l'avez pas vu mais le premier B a été permuté avec le deuxième. Si vous ne l'aviez pas vu, ce n'zt pas de vote faute, c'est bien qu'on arrive pas à distinguer ces deux mots)

Ex 6 Palindromes
Combien y a-t-il de nombres palindromes entre 100 et 1000 ? Un palyndrome est un nombre dont les chiffres font ABA ou ABBA

Géométrie

Ex 7 Une grille de mots croisés est un tableau rectangulaire à n lignes et p colonnes constitué de $n \times p$ cases dont certaines sont noircies et d'autres pas. Notons k le nombre de cases noircies.

1. Combien de grilles différentes peut-on former ? Cela revient à choisir k cases par mi np, donc $\binom{np}{k}$
2. Parmi ces grilles, combien d'entre elles ont au plus une case noircie par colonne ? au plus une case noircie par colonne et au plus une case noircie par ligne ?
   1) Cela revient à choisir k colonnes parmi les p puis choisir parmi les n lignes pour l première colonne, de nouveau parmi n lignes pour la 2e colonnes etc. Donc $\binom{p}{k}n^k$
   Pour la deuxième question : cela revient à choisir k colonnes parmi les p, puis une fois ce choix établi, à choisir dans la première colonne choisie, l'une des n lignes, dans la 2e colonne, l'une des $n-1$ autres lignes, ...et dans la k^e colonne choisie, parmi les $n-k+1$ lignes restantes. Donc $\binom{n}{k}\frac{n!}{(n-p)!}$

Ex 8

1. Combien y a-t-il de carrés dans un quadrillage de n cases sur n ?
   Il y a n^2 de taille 1, $(n-1)^2$ de taille 2,...,$(n-k)^2$ de taille $k+1$.... 1 carré de taille n. Donc $\sum_{k=0}^{n}(n-k)^2 = \sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
2. Existe-t-il un polygone convexe à 1325 diagonales ? si oui lequel ?
   Dans un polygone convexe, chaque sommet forme des diagonales avec tous les autres sommets à l'exception de lui-même et de ses deux voisins, donc forme exactement $n-3$ diagonales. Comme cela fait intervenir 2 sommets, il faudra diviser par deux, donc $\frac{n(n-3)}{2}$.
   Comme $\frac{53\times 50}{2} = 2325$, le polygone à 53 côtés convient il s'agit des fameux pentacontatrigones !

Ex 9 Soit $n \geqslant 4$. On se donne n droites distinctes dans le plan, non parallèles entre elles et telles que trois droites ne soient jamais concourantes.

1. Combien y a-t-il de points d'intersection en tout? Un point d'intersection est formé par chaque combinaison de 2 droites. Donc $\binom{n}{2}$
2. Combien de nouvelles droites sont déterminées par les points d'intersection précédents?
   Avec ces $\binom{n}{2}$, on peut former autant de droites qu'il y a de façons de choisir deux points. Donc $\binom{\binom{n}{2}}{2}$. L'exercice est légèrement mal posé, parce que dans certains cas particuliers, plusieurs choix de 2 points différents pourraient conduire aux même droites...

Dénombrement

Ex 10 **Tournoi de tennis**

1. Lors d'un tournoi de tennis en simples, n joueurs sont engagés. Combien de matchs seront disputés ?
   À chaque match perd une unique personne. Réciproquement, à l'exception du vainqueur du tournoi, chaque personne erd un unique match. Il y a donc bijection entre l'ensemble des perdants et l'ensemble des matchs. Donc $n-1$ matchs.
2. 32 joueurs participent à un tournoi de tennis en double. De combien de façons différentes peut-on écrire le tableau des 8 matchs du premier tour ?
   Cette question peut être interprétée de nombreuses manières différentes.

Ex 11 **Les binômes de danse** n femmes et n hommes se rendent à un cours de danse rock

1. De combien de manière peut-on établir les n binômes formées, de manières à ce que chaque binôme soit constitué d'une femme et d'un homme ? On dénombre des permutations : $n!$
2. En supprimant la contrainte précédente, dec combien de manière peut-on établir les n binômes ?
   $(2n-1)(2n-3)(2n-5)\dots 5\times 3$ c'est-à-dire $\frac{(2n)!}{2^n n!}$

Ex 12 **Formule des colonnes**

Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a $\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.

Le but est d'utiliser un argument combinatoire. On compte le nombre de partie à p+1 éléments dont le plus grand 1, puis le nombre de partie à p+1 éléments dont le plus grand 2, puis le nombre de partie à p+1 éléments dont le plus grand 3, puis le nombre de partie à p+1 éléments dont le plus grand 4, etc, et enfin le nombre de partie à p+1 éléments dont le plus grand n+1

Ex 13 **Formule de Vandermonde**

Soient a, b et n trois entiers naturels tels que $0 \leqslant n \leqslant a+b$.

1. En déterminant le coefficient de x^n dans le développement de $(x+1)^{a+b}$ et en remarquant que $(x+1)^{a+b} = (x+1)^a(x+1)^b$, montrer que
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}$$
Si P est de coefficients $(a_i)_{i=0..\deg(P)}$ Q est de coefficients $(b_i)_{i=0..\deg(Q)}$ alors PQ est de est de coefficients $(c_i)_{i=0..\deg(P)+\deg(Q)}$ avec $c_i = \sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k}$ (par convention, les coefficients au-delà du degré sont nuls).

2. On considère deux ensembles disjoints E et F respectivement de cardinaux a et b. Retrouver en dénombrant les parties à n éléments de $E \cup F$ la formule précédente.
Une partie à n éléments de $E \cup F$ correspond (de manière bijective) à une partie de cardinal k de E union une partie de cardinal $n-k$ de F.

3. En déduire la somme suivante $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.Correspond au cas $a = b$, en prenant en compte : $\binom{b}{n-k} = \binom{b}{k}$. Donc la réponse est $\binom{2n}{n}$

Ex 14 Combien y a-t-il de surjections de $[\![1, n+1]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$

Une telle bijection possède exactement une paire d'éléments possédant la même image. Choisir une telle surjection revient à choisir une combinaison de deux éléments $\{a, b\}$: $\binom{n+1}{2}$ possibilités, puis choisir une bijection entre $[\![1, n+1]\!] \setminus \{b\}$ et $[\![1, n]\!]$: il y a $n!$ possibilités. L'image de b est déterminée par celle de a. La réponse est donc $n!\frac{(n+1)n}{2} = \frac{(n+1)!n}{2}$

Permutations, décompositions et ordre

Ex 15 Soient σ et τ les permutations de S_5 définies par : $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Calculer $\sigma\tau$ et $\tau\sigma$, conclure. Déterminer σ^{-1} et τ^{-1}.

Ex 16

1. Soit $\sigma \in S_n$, justifier que $\{\sigma^k \mid k \in \mathbb{N}^*\}$ est un ensemble fini, puis en déduire qu'il existe un plus petit entier $k_0 > 0$ tel que $\sigma^{k_0} = \mathrm{Id}_{[\![1,n]\!]}$.

2. Soit τ la permutation de S_5 définie par $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$. Déterminer l'ordre de τ.
$\tau = (1342), \tau^2 = (14)(23), \tau^3 = (1243)$ et $\tau^4 = id$. Donc τ est d'ordre 4.

Ex 17 Soit σ_1, σ_2 et σ_3 les permutations de S_8 définies par : $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 8 & 6 & 1 & 7 & 4 & 5 \end{pmatrix}$,

$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 6 & 2 & 4 & 8 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ et $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 4 & 5 & 8 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

1. Calculer l'ordre de chacune des permutations σ_1, σ_2 et σ_3.
$\sigma_1 = (1385)(467)$. Comme les deux cycles sont à supports disjoints, ils commutent, ainsi $\sigma_1^k = (1385)^k(467)^k$ ce qui vaut l'identité ssi k est à la fois multiples de 4 et de 3.
$\sigma_2 = (1368)(2754)$. Pour les mêmes raisons, $\sigma_2^k = (1368)^k(2754)^k$ qui vaut l'identité ssi k est multiple de 4.
$\sigma_3 = (134586)(27)$ Donc $\sigma_3^k = (134586)^k(27)^k$ vaut l'identité ssi k est multiple de 6 et de 2, i.e multiple de 6.

2. En déduire $\sigma_1^{25}, \sigma_2^{22}$ et σ_3^{15}. $\sigma_1^2 4 = \sigma_1^{2\times 12+1} = (\sigma_1^1 2)^2\sigma = \sigma$
$\sigma_2^2 2 = \sigma_2^{5.4+2} = \sigma_2^2 = (1368)^2(2754)^2 = (16)(38)(25)(74)$
$\sigma_3^1 5 = \sigma_3^{2.6+3} = \sigma_3^3 = (134586)^3(27)^3 = (15)(38)(46)(27)$
3. Calculer le nombre d'inversions de chacune des permutations puis en déduire leurs signatures.
Pour σ_1, les inversions sont $(1,2),(1,5),(3,4),(3,5),(3,6),(3,7),(3,8),(4,5),(4,7),(4,8),(6,7),(6,8)$ ce qui fait 12 qui est pair, donc la signature vaut 1
4. Décomposer σ_1, σ_2 et σ_3 , puis retrouver les signatures de chacune.
5. Décomposer σ_1, σ_2 et σ_3 en produits de cycles à supports disjoints puis en produits de transpositions; retrouver les signatures et les ordres de chacune.

Générateurs de S_n et $\mathcal{A}_n$

Ex 18 Pour tout $n \geqslant 2$, montrer que S_n est engendré par :

1. les transpositions $(1\ 2), (1\ 3), \dots, (1\ n)$.
2. les transpositions $(1\ 2), (2\ 3), \dots, (n-1\ n)$.

Ex 19 Soit $\sigma \in S_n$ $(n \geqslant 2)$.

1. Montrer que $\sigma \circ (a_1\ a_2\ \dots\ a_k) \circ \sigma^{-1} = (\sigma(a_1)\ \sigma(a_2)\ \dots\ \sigma(a_k))$.
Soit $i \in [\![1,k]\!]$ alors l'entier $\sigma(a_i)$ est envoyé sur a_i par la permutation σ^{-1} puis sur $a_{i+1,modulo\ k}$ par le k-cycles, puis σ l'envoie enfin sur $\sigma(a_{i+1,modulo\ k})$
Les éléments hors de $\{\sigma(a_i), i = 1..k\}$ ont une image par σ^{-1} qui est hors du support du k-cycles, laissée fixe par celui-ci, puis renvoyé sur eux-mêmes par σ
2. On pose $t = (1\ 2)$ et $c = (1\ 2\ \dots\ n)$. Calculer $c^k t c^{-k}$ pour tout $k \in [\![0, n-2]\!]$.
c^k est la permutation qui à i associe $i+k\ \ modulo\ \ n$. Donc en utilisant la première question $c^k(12)c^{-k} = (c^k(1)c^k(2))$ qui est donc la transposition intervertissant $k+1$ avec $k+2$, i.e. $c^k t c^{-k} = (\ (k+1)\ \ (k+2)\ )$
3. En déduire que S_n est engendré par t et c.
En utilisant l'exercice 18.2 on sait que toutes les permutations de $\mathfrak{S}_n$ peuvent se décomopser en produit de transposition de la forme $(i\ \ (i+1))$. Comme elles mêmes peuvent s'exprimer à l'aide de c et de t, cela démoontre que c et t engendre $\mathfrak{S}_n$

Ex 20 A l'aide des exercices précédents, passer de mot « MERCI » à « CRIME »

1. par des échanges de deux lettres dont la première.
2. par des échanges de lettres contigües.
3. uniquement par des rotations du mot vers la droite ou des échanges des deux premières lettres.

Ex 21 Pour tout $n \geqslant 3$, montrer que $\mathcal{A}_n$ est engendré par :

1. les $3-$cycles.
Soit $\sigma \in \mathfrak{A}_n$. σ se décompose alors en un produit de transpositions, faisant apparaître un nombre pair de transpositions (car de signature 1). On peut donc regrouper les transpositoins deux à deux. Les regroupements du type $(ab)(ab) = id$ se simplifient, ceux du type $(ab)(ac) = (ba)(ac) = (bac)$ sont des 3-cycles. Tous les cas de figures sont bien traités.
2. les $3-$cycles $(1\ i\ j)$ avec $i \neq j$ et $i \geqslant 2, j \geqslant 2$
En se reposant sur la première question, il suffit de montrer que tous les 3-cycles de la forme (ijk) peuvent se décomposer de la manière suivante : $(ijk) = (ij)(jk) = (ij)(j1)(j1)(jk)$ (on a introduit une transposition au carré, ce qui vaut l'identité) puis $(ijk) = (1ij)(1jk)$
3. les $3-$cycles $(1\ 2\ i)$ avec $i \in [\![3, n]\!]$
En reprenant la question 19.1, on sait que $\sigma(12i)\sigma^{-1} = (\sigma(1)\sigma(2)\sigma(j))$, donc pourvu que $\sigma = (1j2)$, cela donnera :
$$(1j2)(12i)(1j2)^{-1} = (j1i) = (1ij)$$
car i étant différent de j, c'est un point fixe de $(12j)$. En remarquant que $(1j2) = (12j)^2$ et $(1j2)^{-1} = (1j2)^2 = (12j)$ on a $(12j)^2(12i)(12j) = (1ij)$. En utilisant la question précédente, toute permutation de $\mathfrak{A}_n$ peut se décomposer en produit de 3-cycles de type $(1ij)$, que l'on peut ensuite décomopser en produit de cycles de type $(12k)$, ce qui prouve le résultat