Colle 17 : Probabilités - Limites et continuité - dérivation

Résultats et preuves à connaître

Proposition 1 Méthode de dichotomie

Si f est continue sur $[a,b]$ telle que $f(a)f(b) \leqslant 0$ alors il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = 0$.

Définition 1 Théorème des valeurs intermédiaires Admettre la proposition 1 pour la démontrer

Soit f continue sur un intervalle I.
Soient $(a,b) \in I^2$ alors toute valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$ est atteinte par f entre a et b.
Démonstration + Contre-exemple lorsuq'on retire l'hypothèse continue + Contre-exemple si la fonction n'est pas à valeurs réelles

Proposition 2 Image d'un intervalle Admettre la proposition 2 pour la démontrer

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Proposition 3 Théorème des bornes atteintes

Soit f continue sur $[a,b]$ alors f est bornée et atteint ses bornes; autrement dit, f admet un maximum et un minimum sur $[a,b]$. Donner l'énoncé, et au choix de l'intérogateur, démontrer que f est bornée OU que f atteint ses bornes

Définition 2 Théorème de la bijection

Pour la démonstration, on aura le droit d'admettre que si f est monotone sur I et $f(I)$ est un intervalle alors f est continue sur I.
Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I alors en posant $J = f(I)$

- J est un intervalle,
- f est une bijection de I dans J,
- f^{-1} est strictement monotone, de même monotonie que f
- f^{-1} est continue sur J,
- les courbes représentatives de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$ (première bissectrice).

Proposition 4 Théorème

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ admet une limite ℓ en a si et seulement si $Re(f)$ et $Im(f)$ admette comme limite $Re(l)$ et $Im(l)$ en a

Proposition 5 Dérivation d'un inverse/d'un quotient

Si f et g sont dérivables sur I et g est non nulle sur I alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont dérivables sur I et

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2} \quad \text{et} \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \times g - f \times g'}{g^2}$$

Proposition 6 Dérivation d'une composée

Si f dérivable sur I, g dérivable sur J et $f(I) \subset J$ alors $g \circ f$ est dérivable sur I et

$$(g \circ f)' = f' \times g' \circ f$$

Proposition 7 Dérivée d'une fonction réciproque

Si f est bijective sur I et dérivable en $a \in I$ tel que $f'(a) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$ et

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$$

Proposition 8 Formule de Leibniz

Si f et g sont n-fois dérivables sur I alors $f+g$ et $f \times g$ sont n-fois dérivables sur I et

$$(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)} \quad \text{et} \quad (f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \times g^{(n-k)}$$

À savoir faire

Donner une question de cours, puis un premier exercie sur le chapitre limites-continuité. Le second exercice pourra ensuite être au choix entre probabilités et limites-continuités (pas d'exercice sur la dérivabilité cette semaine)

- ☐ Utiliser les définitions de convergence avec des ε ou des A.
- ☐ Déterminer des limites de fonctions, prolonger des fonctions par continuité lorsque cela est possible
- ☐ Utiliser le théorème des bornes atteintes
- ☐ Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires (permet de justifier l'existence d'une solution à un problème, de définir une suite de réels x_n solutions d'équations dépendantes de n)
- ☐ Savoir dériver n fois une fonction (formule de Leibniz, ou calculer la dérivée, dérivée seconde etc. conjecturer une formule puis la prouver par récurrence)
- ☐ Introduire des notations claires pour définir les événements dont on calcule les probabilités
- ☐ Savoir distinguer les situations dans lesquelles il y a équiprobabilité.
- ☐ Savoir distinguer dans quels cas on doit utiliser la formule des probabilités totales (lorsqu'il y a une s.c.e qui donne une partition "naturelle" de l'univers)

- ☐ Savoir distinguer dans quels cas on doit utiliser la formule des probabilités composées (lorsqu'il y une notion d'ordre chronologique, où le résultat de la première expérience a une modifie le déroulement de la deuxième, puis de la troisième etc.)

Le programme officiel

A - Limites et continuité

Le paragraphe a) consiste largement en des adaptations au cas continu de notions déjà étudiées pour les suites. Afin d'éviter des répétitions, le professeur a la liberté d'admettre certains résultats.

Pour la pratique du calcul de limites, on se borne à ce stade à des calculs très simples, en attendant de disposer d'outils efficaces (développements limités).

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Limite d'une fonction en un point	
Étant donné un point a de $\overline{\mathbb{R}}$ appartenant à I ou extrémité de I, limite finie ou infinie d'une fonction en a.	Les définitions sont énoncées avec des inégalités larges.
Unicité de la limite.	Notations $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$, $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.
Si f est définie en a et possède une limite en a, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.	
Si f possède une limite finie en a, alors f est bornée au voisinage de a.	
Limite à droite, limite à gauche.	Notations $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$ ou $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$.
Caractérisation séquentielle de la limite (finie ou infinie).	
Opérations sur les limites : combinaison linéaire, produit, quotient, composition.	
Passage à la limite d'une inégalité large.	
Existence d'une limite par encadrement (limite finie), par minoration (limite $+\infty$),par majoration (limite $-\infty$).	
Théorème de la limite monotone.	
b) Continuité en un point	
Continuité, prolongement par continuité en un point.	La continuité de f au point a de I est définie par la relation $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} f(a)$.
Continuité à gauche, à droite.	
Caractérisation séquentielle de la continuité en un point.	
Opérations sur les fonctions continues en un point : combinaison linéaire, produit, quotient, composition.	
c) Continuité sur un intervalle	
Continuité sur un intervalle.	
Théorème des valeurs intermédiaires.	Principe de démonstration par dichotomie.
Image d'un intervalle par une fonction continue.	

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Corollaire : cas d'une fonction continue strictement monotone.	
Théorème des bornes atteintes : toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.	
Image d'un segment par une fonction continue.	
Une fonction continue sur un intervalle, à valeurs réelles et injective, est strictement monotone.	La démonstration n'est pas exigible.
Toute fonction réelle strictement monotone, définie et continue sur un intervalle, admet une fonction réciproque de même monotonie, définie et continue sur un intervalle.	
d) Fonctions complexes	
Brève extension des définitions et résultats généraux sur les limites et la continuité.	Caractérisation de la limite et de la continuité à l'aide des parties réelle et imaginaire.