Colle 15 : Matrices - Dénombrement - Permutations

Résultats et preuves à connaître

Proposition 1 Décomposition

Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ s'écrit de manière unique comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Proposition 2

- Si M est nilpotente, alors $I_n - M \in GL_n(\mathbb{K})$ et $(I_n - M)^{-1} = \sum_{k=0}^{p-1} M^k$ si $M^p = O_n$.

Proposition 3

Si E et F sont deux ensembles finis alors :

- $E \times F$ est un ensemble fini et

$$\operatorname{card}(E \times F) = \operatorname{card}(E) \times \operatorname{card}(F)$$

- E^n est un ensemble fini et

$$\operatorname{card}(E^n) = \operatorname{card}(E)^n$$

- $\mathscr{F}(E,F) = F^E$ est un ensemble fini et

$$\operatorname{card}(F^E) = \operatorname{card}(F)^{\operatorname{card}(E)}$$

Proposition 4

Soient E et F deux ensembles finis de cardinaux respectifs p et n. Le nombre d'injections de E dans F est l'entier

$$A_n^p = n(n-1)\cdots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!} \text{ si } 0 \leqslant p \leqslant n \quad \text{et} \quad A_n^p = 0 \text{ si } p > n$$

Proposition 5 À démontrer en explicitant une bijection entre $A \cup B$ et $[\![1, n+p]\!]$

Soient $(A,B) \in \mathscr{P}(E)^2$ avec A et B deux ensembles finis disjoints. Alors $A \cup B$ est un ensemble fini et

$$\operatorname{card}(A \cup B) = \operatorname{card}(A) + \operatorname{card}(B).$$

Proposition 6 Résultat à connaître, savoir explicier une bijection entre $[\![0, n-1]\!] \times [\![0, m-1]\!]$ et $[\![0, nm-1]\!]$

Si E et F sont deux ensembles finis alors :

- $E \times F$ est un ensemble fini et

$$\operatorname{card}(E \times F) = \operatorname{card}(E) \times \operatorname{card}(F)$$

- E^n est un ensemble fini et

$$\operatorname{card}(E^n) = \operatorname{card}(E)^n$$

- $\mathscr{F}(E,F) = F^E$ est un ensemble fini et

$$\operatorname{card}(F^E) = \operatorname{card}(F)^{\operatorname{card}(E)}$$

Proposition 7 Formulaire associé aux combinaisons : à prouver de manière combinatoire

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall p \in [\![1,n]\!]$, on a

- $\binom{n}{0} = 1$ • $\binom{n}{n} = 1$ • $\binom{n}{1} = n$
- $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ • $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$ Formule de Pascal
- $\binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$ Formule de conversion
- $\forall (x,y) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}$,

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \quad \text{Formule du binôme de Newton}$$

- $\forall x \in \mathbb{C}, \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n, \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \quad$ et $\quad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$

Proposition 8 Cycles

- Toute transposition est une involution et donc une permutation.
- Tout $p-$cycle $(a_1\ a_2\ \dots\ a_p)$ est une permutation d'inverse $(a_p\ a_{p-1}\ \dots\ a_1)$.

De plus, $(a_1\ a_2\ \dots\ a_p) = (a_1\ a_2)(a_2\ a_3)\dots(a_{p-1}\ a_p)$.
- Deux cycles à supports disjoints commutent.

Proposition 9 Méthode de décomposition en cycle à supports disjoints

Justifier que $\forall k \in [\![1;n]\!]$, il existe un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sigma^p(k) = k$

Expliquer la méthode décomposition en cycles à supports dijoints on ne démontrera pourquoi cette méthode fonctionne.

L'appliquer sur des exemples.

Proposition 10 Décomposition en transpositions

Détailler la méthode itérative en expliquant pourquoi le nombre de points fixes croît strictement, et justifier que cette méthode se termine.

Définition 1 Signature

On appelle signature d'une permutation $\sigma \in S_n$ le réel $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{I(\sigma)}$.

Une permutation est dite paire si sa signature vaut 1 et impaire si sa signature vaut -1.

- Toutes les transpositions sont de signature -1 À savoir démontrer
- $\forall (\sigma,\tau) ß S_n^2$, $\varepsilon(\sigma \circ \tau) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)$ Résultat admis
- Si $\sigma = \prod_{i=1}^{p} \tau_i$ où tous les τ_i sont des permutations alors $\varepsilon(\sigma) = (-1)^p$
- Tout p-cycle est de signature $(-1)^{p-1}$

À savoir faire

Toujoiurs commencer par un exercice sur le dénombrement ou les permutations, et s'il est réussi, un exercice sur les matrices ou de nouveau sur dénombrement/permutations.

- ☐ Savoir décomposer en produits de cycles à supports disjoints une permutation. Savoir ensuite la décomposer en produit de transposition.
- ☐ Savoir calculer la signature d'une permutation (des deux manières : en dénombrant les inversions si n et en décomposant en transpositions)
- ☐ Savoir distinguer les situations dans lesquelles on dénombre des listes, des arrangements ou des combinaisons, et dénombrer.
- ☐ Calculer un produit de matrices, une transposée de matrices. Déterminer si une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est inversible ou non (et connaître l'inverse dans ce cas).
- ☐ Calculer des puissances d'une matrice donnée en calculant les premières puissances puis en conjecturant une propriété qui se démontre par récurrence.
  Ou en remarquant que $M = \lambda I + A$ où les puissances de A se calculent simplement (nilpotente, ou autre raison).
- ☐ Déterminer si une matrice annulée par un polynôme est inversible ou non (et déterminer l'inverse lorsque cela est possible.)

Le programme officiel

Dénombrement

Cette section est introduite essentiellement en vue de son utilisation en probabilités ; rattaché aux mathématiques discrètes, le dénombrement interagit également avec l'algèbre et l'informatique.
Toute formalisation excessive est exclue. En particulier :

- *parmi les propriétés du paragraphe a), les plus intuitives sont admises sans démonstration;*
- *l'utilisation de bijections dans les problèmes de dénombrement n'est pas un attendu du programme.*

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Cardinal d'un ensemble fini	
Cardinal d'un ensemble fini.	Notations $\|A\|$, $\operatorname{card}(A)$. Tout fondement théorique des notions d'entier naturel et de cardinal est hors programme.
Cardinal d'une partie d'un ensemble fini, cas d'égalité. Une application entre deux ensembles finis de même cardinal est bijective si et seulement si elle est injective, si et seulement si elle est surjective.	
Opérations sur les cardinaux : union disjointe ou quelconque, complémentaire, différence, produit cartésien.	La formule du crible est hors programme.

Contenus	Capacités & Commentaires
Cardinal de l'ensemble des applications d'un ensemble fini dans un autre. Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini.	
b) Listes et combinaisons	
Nombre de p-listes (ou p-uplets) d'éléments distincts d'un ensemble de cardinal n, nombre de permutations d'un ensemble de cardinal n.	Nombre d'applications injectives d'un ensemble de cardinal p dans un ensemble de cardinal n.
Nombre de parties à p éléments (ou p-combinaisons) d'un ensemble de cardinal n.	Démonstration combinatoire des formules de Pascal et du binôme.

A - Groupe symétrique

Le groupe symétrique est introduit en vue de l'étude des déterminants, mais aussi pour son intérêt propre et ses interventions possibles dans diverses questions d'algèbre et de probabilités.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Généralités	
Groupe des permutations de l'ensemble $\{1,\dots,n\}$.	Notation S_n.
Cycle, transposition.	Notation $(a_1\ a_2\ \dots\ a_p)$.
Décomposition d'une permutation en produit de cycles à supports disjoints : existence, unicité, commutativité.	La démonstration n'est pas exigible, mais les étudiants doivent savoir décomposer une permutation.
b) Signature d'une permutation	
Décomposition d'une permutation en produit de transpositions.	
Signature : il existe un unique morphisme de groupes de S_n dans $\{-1,1\}$ envoyant toute transposition sur -1.	La démonstration n'est pas exigible.