Colle 16 : Probabilités et limites/continuité

Résultats et preuves à connaître

Proposition 1 Groupe alterné

$\mathcal{A}_n$ est un groupe fini de cardinal $\dfrac{n!}{2}$.

Proposition 2 Opérations sur les probabilités

Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathrm{P})$ un espace probabilisé fini et A et B deux événements.

1. $\mathrm{P}(\Omega) = 1$ et $\mathrm{P}(\varnothing) = 0$
2. $\mathrm{P}(\overline{A}) = 1 - \mathrm{P}(A)$
3. $\mathrm{P}(A \backslash B) = \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(A \cap B)$
4. $A \subset B \Longrightarrow \mathrm{P}(A) \leqslant \mathrm{P}(B)$
5. $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$

Proposition 3 Théorème

Soit $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ et $(p_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille de réels.
Il existe une unique probabilité P sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ telle que $\forall i \in [\![1, n]\!], \mathrm{P}(\{\omega_i\}) = p_i$ si et seulement si

1. $\forall i \in [\![1, n]\!], p_i \geqslant 0$
2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

Dans ce cas, on aura alors, pour tout événement A :

$$\mathrm{P}(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i$$

Proposition 4 Formule des probabilités totales

Soit $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ un système complet d'événements.
Alors pour tout événement B, on a

$$\mathrm{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A_i \cap B) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A_i)\mathrm{P}(B \mid A_i)$$

avec la convention $\mathrm{P}(A_i)\mathrm{P}(B \mid A_i) = 0$ si $\mathrm{P}(A_i) = 0$.

Proposition 5 Formule de Bayes généralisée

Soit $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ un système complet d'événements de probabilités non nulles et B un événement B de probabilité non nulle. Pour tout $i_0 \in [\![1,n]\!]$,

$$\mathrm{P}(A_{i_0}\,|\,B) = \frac{\mathrm{P}(A_{i_0})\mathrm{P}(B\,|\,A_{i_0})}{\sum\limits_{i=1}^{n}\mathrm{P}(A_i)\mathrm{P}(B\,|\,A_i)}$$

Proposition 6 Propriétés

Si A et B sont deux événements indépendants pour la probabilité P alors sont également indépendants pour la probabilité P :

1. A et $\overline{B}$
2. $\overline{A}$ et B
3. $\overline{A}$ et $\overline{B}$

Proposition 7

Si des événements sont mutuellement indépendants alors ils sont deux à deux indépendants. La réciproque n'est pas vraie en générale

Proposition 8 Limites

Être capable de réécrire avec des ε (ou des A suivant la situation) toutes les définitions de $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ pour $a\in\mathbb{R}$, $a=\pm\infty$ et $\ell\in\mathbb{R}$ ou $\ell=\pm\infty$. Lorsque $a\in\mathbb{R}$, savoir donner les définitions de "admettre une limite à gauche/ à droite".
Savoir donner la négation de ces définitions.

Proposition 9 Proposition

Si f et g ont une limite finie en a ($\in\overline{\mathbb{R}}$ mais on le prouvera uniquement pour $a\in\mathbb{R}$) et $f\leqslant g$ au voisinage de a alors $\lim\limits_a f \leqslant \lim\limits_a g$.

Proposition 10 Théorème de minoration/majoration

Si $f\leqslant g$ au voisinage de a, ($\in\overline{\mathbb{R}}$ mais on le prouvera uniquement pour $a\in\mathbb{R}$)
$\lim\limits_a f = +\infty \Longrightarrow \lim\limits_a g = +\infty$
$\lim\limits_a g = -\infty \Longrightarrow \lim\limits_a f = -\infty$

Proposition 11 Théorème de limite monotone

Soient $(a,b)\in\overline{\mathbb{R}}^2$. (on ne démontrera que le premier point, et pour $b\in\mathbb{R}$)
• Si f est croissante et majorée sur $]a,b[$ alors $\lim\limits_{b^-} f$ existe et vaut $\sup\limits_{]a,b[} f$.
Si f est croissante et non majorée sur $]a,b[$ alors $\lim\limits_{b^-} f = +\infty$.
• Si f est croissante et minorée sur $]a,b[$ alors $\lim\limits_{a^+} f$ existe et vaut $\inf\limits_{]a,b[} f$.
Si f est croissante et non minorée sur $]a,b[$ alors $\lim\limits_{a^+} f = -\infty$.

À savoir faire

Pas d'exercice sur les limites cette semaine : toujours commencer par un exercice de probabilités, puis éventuellment un second voire un exercice de dénombrement.

- ☐ Savoir distinguer les situations dans lesquelles il y a équiprobabilité.
- ☐ Savoir distinguer dans quels cas on doit utiliser la formule des probabilités totales (lorsqu'il y a une s.c.e qui donne une partition "naturelle" de l'univers), des probabilités composées (lorsqu'il y une notion d'ordre chronologique, où le résultat de la première expérience a une importance sur le déroulement de la deuxième, puis de la troisième etc.) et la formule de Bayes généralisée (calculer la probabilité d'une cause lorsque l'énoncé nous donne plutôt celle d'une conséquence)
- ☐ Pas d'exercices sur limites et continuité cette semaine

Ce qu'en dit le programme

A - Probabilités sur un univers fini, variables aléatoires et lois

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Univers, événements, variables aléatoires	
Lien entre vocabulaire ensembliste et vocabulaire des probabilités.	On se limite au cas d'un univers fini. Événement élémentaire (singleton), système complet d'événements, événements disjoints (ou incompatibles).
Une variable aléatoire X est une application définie sur l'univers Ω à valeurs dans un ensemble E.	Notations $\{X \in A\}$ et $(X \in A)$.
b) Espaces probabilisés finis	
Probabilité sur un univers fini.	Espace probabilisé fini (Ω, P). Notations $P(X \in A)$, $P(X = x)$ et $P(X \leqslant x)$.
Une distribution de probabilités sur un ensemble E est une famille d'éléments de $\mathbb{R}^+$ indexée par E et de somme 1. Une distribution de probabilités sur un ensemble fini est une famille de réels positifs indexée par cet ensemble et de somme 1. Probabilité uniforme.	Une probabilité P sur Ω est déterminée par la distribution de probabilités $(P(\{\omega\}))_{\omega\in\Omega}$.
Probabilité de la réunion ou de la différence de deux événements, de l'événement contraire. Croissance.	La formule du crible est hors programme.
c) Probabilités conditionnelles	
Si $P(B) > 0$, la probabilité conditionnelle de A sachant B est définie par la relation $P(A\|B) = P_B(A) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$. L'application P_B est une probabilité.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Formules des probabilités composées, des probabilités totales, de Bayes.	Par convention, $P(A\|B)P(B) = 0$ lorsque $P(B) = 0$.

d) Loi d'une variable aléatoire

Pas encore abordé

e) Événements indépendants

Contenus	Capacités & Commentaires
Les événements A et B sont indépendants si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.	Si $P(B) > 0$, l'indépendance de A et B s'écrit $P(A\|B) = P(A)$.
Famille finie d'événements indépendants.	L'indépendance deux à deux n'implique pas l'indépendance.
Si A et B sont indépendants, A et $\overline{B}$ le sont aussi.	Extension au cas de n événements.