Exercice 1

1a] On pose $\Sigma = [\![1,9]\!]$.
Un code est une 3-liste de Σ, donc il y a $\text{Card}(\Sigma^3) = 9^3$ codes possibles.

b] Un code se terminant par un chiffre pair est ~~la~~ donnée d'une 2-liste de Σ, puis d'un dernier chiffre pair il y en

$$\text{Card}\left([\![1,9]\!]^2 \times \{2,4,6,8\}\right) = 4 \times 9^2.$$

c] Notons $CSC4$ l'ensemble des codes sans chiffre 4.
Alors $CSC4 = \left([\![1,9]\!] \setminus 4\right)^3$, son cardinal vaut donc 8^3.

On a $CAC4$ (ensemble des codes avec au moins un chiffre 4)

vérifie $C.A.C4 = \Sigma^3 \setminus CSC4$.

il y en a donc $9^3 - 8^3$.

d] Soit $CAE1C4$ les codes avec exactement 1 chiffre 4.

Alors, $CAE1C4$

$$= \{4\} \times (\Sigma \setminus \{4\})^2 \quad \text{chiffre des centaines : 4 : 2 autres chiffres} \neq 4$$
$$\cup\ (\Sigma \setminus \{4\}) \times \{4\} \times (\Sigma \setminus \{4\}) \quad \text{4 : en dizaine}$$
$$\cup\ (\Sigma \setminus 4)^2 \times \{4\} \quad \text{4 : en unité.}$$

Il y en a donc $3 \times 1 \times 8^2 = 3 \times 64$.

2] a] On dénombre alors des 3-arrangements.

il y en a $9 \times 8 \times 7$.

b] Choisir un tel code revient à choisir le dernier chiffre (k) parmi $\{1, 3, 5, 7, 9\}$: 5 choix puis choisir pour les 2-premiers chiffres un 2-arrangements de $\Sigma \setminus \{k\}$

Donc : $5 \times 8 \times 7$.

c] Nb de code sans chiffre 6 : 3-arrangements de $\Sigma \setminus \{6\}$.

il y en a $8 \times 7 \times 6$.

Nb de code avec chiffre 6 :

Nb total − Nb sans chiffre 6, donc $9 \times 8 \times 7 - 8 \times 7 \times 6$

$= (9-6) \times 8 \times 7$

$= 3 \times 8 \times 7 = 3 \times 56$

$= \boxed{168}$.

3.) a) Pour choisir B, on a $\binom{n}{i}$ manières possibles.

Pour choisir A, on doit ensuite faire en sorte que tous les éléments de $E \setminus B$ se trouvent dans E, et l'on peut ensuite choisir $X \subset B$ (il y a 2^i manières de choisir un tel X) et former $A := B \sqcup X$.

$$\Omega_i := \{((E \setminus B) \sqcup X, B),\ B \in \mathcal{P}_i(E) \text{ et } X \in \mathcal{P}(B)\}.$$

$$\boxed{\mathrm{Card}(\Omega_i) = \binom{n}{i} \times 2^i}$$

b) $\{(A,B) \in \mathcal{P}(E)^2 / A \cup B = E\}$

$$= \bigsqcup_{i=0}^{n} \{(A,B) \in \mathcal{P}(E)^2 / A \cup B = E \text{ et } \mathrm{Card}(B) = i\}.$$

$$= \bigsqcup_{i=0}^{n} \Omega_i$$

Donc son cardinal vaut $\sum_{i=0}^{n} \mathrm{Card}(\Omega_i)$

ie $$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \times 2^i \times 1^{n-i} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{formule du binôme.}}}{=} \boxed{(2+1)^n = 3^n}$$

Ex 2

1) $$\sigma\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 8 & 4 & 7 & 9 & 3 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\sigma'\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 1 & 9 & 3 & 6 & 7 & 8 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

2) Les inversions de σ sont :

$(1,2)$, $(1,3)$, $(1,4)$, $(1,5)$, $(1,6)$, $(1,8) \to 6$
$(2,3)$, $(2,4)$, $(2,8) \to 3$
$(3,4) \to 1$
$(5,8) \to 1$
$(6,7)$, $(6,8)$, $(6,9) \to 3$
$(7,8) \to 1$

Il y a $6+3+1+1+3+1$ donc 15 inversions.

Les inversions de σ' sont

$(1,3), (1,4) \longrightarrow 2$

$(2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (2,7), (2,8), (2,9) \longrightarrow 7$

$(3,4) \longrightarrow 1$

$(5,7), (5,8) \longrightarrow 2$

$(6,7), (6,8), (6,9) \longrightarrow 3$

Il y a $2+7+1+2+3$ donc 15 inversions.

Donc $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{15} = -1$ et $\varepsilon(\sigma') = (-1)^{15} = -1$.

Les deux permutations sont impaires.

3) $\sigma = (1\ 7\ 6\ 9\ 8\ 3\ 2\ 4)$

$= (17)(76)(69)(98)(83)(32)(24)$

Donc $\varepsilon(\sigma) = (-1)^7 = -1$ (cohérent avec le résultat trouvé à la Q.2)

$\sigma' = (1\ 3\ 2\ 9\ 7\ 4)(5\ 6\ 8)$

$= (13)(32)(29)(97)(74)(56)(68)$

Donc $\varepsilon(\sigma') = (-1)^7 = -1$ (cohérent avec la Q.2)

4) $\sigma^{2024} = (1\ 7\ 6\ 9\ 8\ 3\ 2\ 4)^{2024}$. Comme σ est un 8-cycle, et que

$$\begin{array}{r|l} 2024 & 8 \\ \hline 42 & 253 \\ 24 & \end{array}$$

on a $\boxed{\sigma^{2024} = id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}}$

—

σ' est la composée d'un 6-cycle et d'un 3-cycle.

On a
$$\begin{array}{r|l} 2024 & 3 \\ \hline 22 & 672 \\ 14 & \\ 2 & \end{array}$$
Donc $2024 = 3 \times 672 + 2$

Ainsi $2024 \equiv 2\ [3]$

et $2024 = 3 \times (2 \times 336) + 2 = 6 \times 336 + 2$

Donc $2024 \equiv 2\ [6]$.

D'où $\boxed{\sigma'} = (1\ 3\ 2\ 9\ 7\ 4)^{2024}\ (5\ 6\ 8)^{2024}$

$= (1\ 3\ 2\ 9\ 7\ 4)^2\ (5\ 6\ 8)^2$

$= (1\ 2\ 7)(3\ 9\ 4)(5\ 8\ 6)$

$$= \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 7 & 9 & 3 & 8 & 5 & 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}}$$

---

1. (a) Pousser les boutons un par un revient à se donner
- $\sigma(1)$: le bouton appuyé à la 1ère étape
- $\sigma(2)$ ______ 2e ______

  ⋮
- $\sigma(n)$ ______ ne étape

de manière à ce que σ soit une permutation de $[\![1, n]\!]$.

Il y a donc $n!$ n-combinaisons de cette forme-là.

b) Il y a déjà $3!$ possibilités en n'enclenchant qu'un bouton à la fois

$(\{1\},\{2\},\{3\}), (\{1\},\{3\},\{2\}), (\{2\},\{1\},\{3\}), (\{2\},\{3\},\{1\})$
$, (\{3\},\{1\},\{2\})$ et $(\{3\},\{2\},\{1\})$.

On peut aussi enclencher 2 boutons puis 1 :
$(\{1,2\},\{3\})$; $(\{1,3\},\{2\})$; $(\{2,3\},1)$

Ou le contraire : 1 bouton puis 2.
$(\{1\},\{2,3\}), (\{2\},\{1,3\}), (\{3\},\{1,2\})$

et enfin : enclencher les 3 d'un coup (pour les gens qui veulent aller vite !)

$(\{1,2,3\})$

Cela représente donc $6+3+3+1 = 13$ possibilités.

$$\boxed{a_3 = 13}$$

2.a On peut choisir une partie de cardinal k de $\binom{n}{k}$ manières.

2.b Pour cela, on doit choisir
- P_1 de cardinal k : $\binom{n}{k}$ manière de choisir
- compléter ensuite avec une n-combinaison de $A_n \setminus P_1$: a_{n-k} manières possibles,

Cela fait donc $\boxed{\binom{n}{k} a_{n-k}}$ manières possibles.

2.c L'ensemble des n-combinaisons est l'union disjointe, pour k allant de 1 à n, des ensembles de n-combinaisons dont la première partie est de cardinal k.

On a ainsi $\boxed{a_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a_{n-k}}$

3.a) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$b_n = \frac{a_n}{n!} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{a_{n-k}}{n!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\cancel{n!}}{k!(n-k)!} \frac{a_{n-k}}{\cancel{n!}}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{b_{n-k}}{k!}$$

b) Soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété " $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \leq e^x$ "

Initialisation : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \sum_{k=0}^{0} \frac{x^k}{k!} = 1$

et $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $1 = e^0 \leq e^x$

ce qui prouve $\mathcal{P}(0)$.

Hérédité soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose $\mathcal{P}(n)$.

On pose $f : \begin{cases} \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \left(\sum_{k=0}^{n+1} \frac{x^k}{k!}\right) - e^x \end{cases}$

On a alors : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $f'(x) = \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k\, x^{k-1}}{(k-1)!}\right) - e^x$

$$= \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!}\right) - e^x.$$

D'après $\mathcal{P}(n)$, $f' \leq 0$ donc f est décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$. Or $f(0) = 1 - e^0 = 0$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $f(x) \leq f(0) = 0$.

i.e $\boxed{\sum_{k=0}^{n+1} \frac{x^k}{k!} \leq e^x}$ ce qui prouve $\mathcal{P}(n+1)$

Conclusion $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$,

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \leq e^x}$$

c) Soit $\mathcal{H}(n)$: " $b_n \leq \dfrac{1}{(\ln(2))^n}$ " on a :

Initialisation $b_1 = \dfrac{a_1}{1!} = \dfrac{1}{1} = 1.$

et comme $\ln(2) < 1$, on a bien $\dfrac{1}{\ln(2)} > 1$

d'où $b_1 \leq \dfrac{1}{\ln(2)^1}$, ce qui prouve $\mathcal{H}(1)$

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose $\mathcal{H}(1), \mathcal{H}(2), \dots$ et $\mathcal{H}(n)$

Alors $b_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{b_{\overbrace{n+1-k}^{\in [\![1,n]\!]}}}{k!}$ $\longrightarrow \leq \dfrac{1}{\ln(2)^{n+1-k}}$ d'après $\mathcal{H}(n+1-k)$

On a donc $b_{n+1} \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{\ln(2)^{k-(n+1)}}{k!}$

$$= \frac{1}{\ln(2)^{n+1}} \times \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\ln(2)^k}{k!}$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{\ln(2)^k}{k!} = \left(\sum_{k=0}^{n+1} \frac{\ln(2)^k}{k!}\right) - 1 \underset{\text{D'après Q.2.b}}{\leq} e^{\ln(2)} - 1 = 2 - 1 = 1.$$

Conclusion $b_{n+1} \leq \dfrac{1}{\ln(2)^{n+1}}$, ce qui prouve $\mathcal{H}(n+1)$

et donc par récurrence forte, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathcal{H}(n).$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{b_n \leqslant \frac{1}{(\ln(2))^n}}$

Exercice 4

1] $\mathbb{P}(D_1) = \frac{1}{3}$ et $\mathbb{P}(D_2) = \frac{2}{3}$.

2] Conditionnellement à D_1, nous jouons avec le dé D1, qui a 4 faces rouges sur 6, donc une probabilité $\frac{2}{3}$ d'obtenir une face rouge.

$$\mathbb{P}_{D_1}(R1) = \frac{2}{3}.$$

Idem pour le 2e (ou n'importe quel k^e) lancer :

$$\mathbb{P}_{D_2}(R_1) = \frac{2}{3}$$

Comme les 2 lancers sont indépendants,

$$\mathbb{P}_{D_1}(R_1 \cap R_2) = \mathbb{P}_{D_1}(R_1) \times \mathbb{P}_{D_1}(R_2)$$
$$= \left(\frac{2}{3}\right)^2.$$

On utilise la F.P.T avec le S.C.E $(D1, D_2)$.

$$\boxed{\mathbb{P}(R_1 \cap R_2)} = \mathbb{P}(D_1) \times \mathbb{P}(R_1 \cap R_2 | D_1) + \overbrace{\mathbb{P}(D_2)}^{=\frac{1}{3}} \times \underbrace{\mathbb{P}(R_1 \cap R_2 | D_2)}_{= \mathbb{P}(R_1|D_2) \times \mathbb{P}(R_2|D_2) = \left(\frac{1}{3}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$= \frac{4+2}{9} = \frac{6}{9} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

5) En utilisant le S.C.E (D_1, D_2), on applique la F.P.T :

$$\boxed{\mathbb{P}(R_1\cap\ldots\cap R_n)} = \underbrace{\mathbb{P}(D_1)}_{=\frac{1}{3}} \times \underbrace{\mathbb{P}(R_1\cap\ldots\cap R_n \mid D_1)}_{=\prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}(R_i\mid D_1) \text{ par indépendance } = \left(\frac{2}{3}\right)^n} + \overbrace{\mathbb{P}(D_2)}^{=\frac{2}{3}} \times \overbrace{\mathbb{P}(R_1\cap\ldots\cap R_n \mid D_2)}^{=\left(\frac{1}{3}\right)^n}$$

$$= \frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^n = \boxed{\frac{2^n+2}{3^{n+1}}}$$

Donc $$\mathbb{P}_{R_1\cap\ldots\cap R_n}(R_{n+1}) = \frac{\mathbb{P}(R_1\cap\ldots\cap R_n\cap R_{n+1})}{\mathbb{P}(R_1\cap\ldots\cap R_n)}$$

$$= \frac{\frac{2^{n+1}+2}{3^{n+2}}}{\frac{2^n+2}{3^{n+1}}} = \frac{2^{n+1}+2}{(2^n+2)\times 3}$$

6)

D'après la formule de Bayes :

$$\mathbb{P}_{R_1\cap R_2}(D_1) = \mathbb{P}_{D_1}(R_1\cap R_2)\times\frac{\mathbb{P}(D_1)}{\mathbb{P}(R_1\cap R_2)}$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{1/3}{2/3} = \frac{4}{9\times 2} = \frac{2}{9}.$$

Toujours d'après la formule de Bayes :

$$\mathbb{P}_{R_1\cap\ldots\cap R_n}(D_1) = \frac{\mathbb{P}_{D_1}(R_1\cap\ldots\cap R_n)\times\mathbb{P}(D_1)}{\mathbb{P}(R_1\cap\ldots\cap R_n)}$$

$$= \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n\times\frac{1}{3}}{\frac{2^n+2}{3^{n+1}}} = \frac{\frac{2^n}{3^{n+1}}}{\frac{2^n+2}{3^{n+1}}} = \frac{2^n}{2^n+2}$$

$\boxed{7}$ $P_{R_1 \cap \dots \cap R_n}(D_1) = \dfrac{2^n}{2^n+2}$

et $P_{R_1 \cap \dots \cap R_n}(R_{n+1}) = \dfrac{2^{n+1}+2}{3\times(2^n+2)}$

On a $\dfrac{2^n}{2^n+2} \leq \dfrac{2^{n+1}+2}{3\times(2^n+2)} \iff 3\times 2^n \leq 2\times 2^n + 2$

$\iff 2^n \leq 2 \iff n \leq 1.$

Donc $\forall n \geq 1$, $P_{R_1 \cap \dots \cap R_n}(D_1) \geq P_{R_1 \cap \dots \cap R_n}(R_{n+1})$

Donc il vaut mieux parier sur le fait que le dé est le dé D1.

1.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -9 & 10 & -9 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Donc $A^2 - 3A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = -2I$

Ainsi $-\frac{1}{2}(A^2 - 3A) = I$ i.e $\underbrace{-\frac{1}{2}(A-3I)A}_{= A \times -\frac{1}{2}(A-3I)} = I$

Donc A est inversible, d'inverse $-\frac{1}{2}(A-3I)$ i.e

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 & 1/2 \\ 3/2 & -1/2 & 3/2 \\ 1/2 & -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

$\boxed{b}$ Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$. On pose $Y = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ et on résout en l'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ l'équation $AX = Y$.

On a $AX = Y \iff \begin{cases} y - z = \alpha \\ -3x + 4y - 3z = \beta \\ -x + y = \gamma \end{cases} \iff \begin{cases} -x + y = \gamma \\ -3x + 4y - 3z = \beta \\ y - z = \alpha \end{cases}$

$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1}{\iff} \begin{cases} -x + y = \gamma \\ y - 3z = \beta - 3\gamma \\ y - z = \alpha \end{cases} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\iff} \begin{cases} -x + y = \gamma \\ y - 3z = \beta - 3\gamma \\ 2z = \alpha - \beta + 3\gamma \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x = y - \gamma = \frac{3}{2}\alpha - \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\gamma \\ y = \frac{3}{2}\alpha - \frac{1}{2}\beta + 3/2\,\gamma \\ z = \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\beta + \frac{3}{2}\gamma \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$

Ainsi $\forall Y \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, $AX = Y \iff X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} Y$

Donc A est inversible, d'inverse

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$\boxed{2.a}$ i) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$A^2 - 3A = -2I_3$. En multipliant par A^n,

on obtient $A^{n+2} - 3A^{n+1} = -2A^n$

d'où $\underline{A^{n+2} - 2A^{n+1} = A^{n+1} - 2A^n}$.

On a donc $A^{n+2} - 2A^{n+1} = A^{n+1} - 2A^n$

$= A^n - 2A^{n-1} = A^{n-1} - 2A^{n-2}$

$= \dots\dots = A - 2I$

(Preuve rigoureuse : $\mathcal{P}(n)$: " $A^{n+2} - 2A^{n+1} = A - 2I$ "

Initialisation : comme $A^2 - 3A = -2I$, on a bien

$A^2 - 2A = A - 2I$

i.e $A^2 - 2A^1 = A - 2I$, ce qui prouve $\mathcal{P}(0)$

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose $\mathcal{P}(n)$,

alors $A^{n+3} - A^{n+2} = A \times (A^{n+2} - A^{n+1})$ D'après $\mathcal{P}(n)$

$= A \times (A - 2I)$

$= A^2 - 2A$

$= A - 2I$, ce qui prouve $\mathcal{P}(n+1)$.)

2

Enfin,

$$\boxed{B_{n+2}} = A^{n+2} + A - 2I = (2A^{n+1} + A - 2I) + A - 2I$$
$$= 2A^{n+1} + 2A - 4I$$
$$= 2\,(A^{n+1} + A - 2I)$$
$$= \boxed{2\ B_{n+1}}$$

ii) Par récurrence, on obtient que $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$B_n = 2^{n-1}\ B_1 = 2^{n-1}\,(A^1 + A - 2I)$$
$$= 2^{n-1} \times 2\,(A - I)$$
$$= 2^n\,(A - I)$$

i.e $\quad A^n + A - 2I = 2^n(A - I)$

Donc $\quad \boxed{A^n = 2^n\,(A - I) - A + 2I}$

b) Calculons C^2 : $\quad C^2 = (A - I)^2 = A^2 - 2A + I$
$$= \underbrace{A^2 - 3A} + A + I$$
$$= -2I + A + I = A - I$$
$$= C$$

Comme $C^2 = C$, on obtient par récurrence :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{C^n = C}$

• Calculons D^2 : $\quad D^2 = (2I - A)^2 = 4I - 4A + A^2$
$$= 4I - A + \underbrace{(A^2 - 3A)}$$
$$= 4I - A - 2I$$
$$= 2I - A = D.$$

$D^2 = D$, puis par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{D^n = D}$

ii) On a $\begin{cases} C = A - I \\ D = -A + 2I \end{cases}$

Donc $D + 2C = A$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$A^n = (2C + D)^n$ or C et D commutent, en tant que polynôme en A.

Ainsi d'après la formule du binôme :

$$A^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2C)^k D^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k \underbrace{C^k}_{= \begin{cases} I \text{ si } k=0 \\ C \text{ sinon} \end{cases}} \underbrace{D^{n-k}}_{= \begin{cases} I \text{ si } k=n \\ D \text{ sinon} \end{cases}}$$

$$= D + \left(\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} 2^k CD\right) + 2^n C$$

$$= D + \left(\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} 2^k\right) CD + 2^n C$$

Or $CD = (A-I)(2I-A) = 2A - A^2 - 2I + A$
$= 3A - A^2 - 2I = -(A^2 - 3A) - 2I$
$= O_3$

Donc $A^n = (2I - A) + 2^n C$
$= (2I - A) + 2^n (A - I)$

On retrouve bien $\boxed{A^n = 2^n(A-I) - A + 2I}$

i) On a : $A^0 = I = 0A + 1 \cdot I$

$A^1 = A = 1 \cdot A + 0 \cdot I$

On pose $\alpha_0 = 0$, $\beta_0 = 1$

$\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = 0$

et l'on a donc $A^n = \alpha_n A + \beta_n I$.

On suppose α_n et β_n construits pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$.

On a alors

$$A^{n+1} = A^n \times A = (\alpha_n A + \beta_n I) A$$
$$= \alpha_n A^2 + \beta_n A$$
$$= \alpha_n (3A - 2I) + \beta_n A$$
$$= (3\alpha_n + \beta_n) A + (-2\alpha_n) I$$

En posant $\begin{cases} \alpha_{n+1} = 3\alpha_n + \beta_n \\ \beta_{n+1} = -2\alpha_n \end{cases}$ on obtient

bien $A^{n+1} = \alpha_{n+1} A + \beta_{n+1} I$

On démontre ensuite que par récurrence sur n,

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\underline{\underline{A^n = \alpha_n A + \beta_n I}}$.

ii) Posons, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$u_n = \alpha_n + \beta_n$.

On a alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \alpha_{n+1} + \beta_{n+1}$
$= 3\alpha_n + \beta_n - 2\alpha_n = \alpha_n + \beta_n = u_n$

Donc u est constante (super !)

et l'on a $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 = \alpha_0 + \beta_0 = 1$

On a donc $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \alpha_n = 1 - \beta_n$

et $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\beta_{n+1} = -2\alpha_n = -2 + 2\beta_n.$$

Donc β est arithmético-géométrique.

Résolvons $x = -2 + 2x \iff -x = -2 \iff x = 2$.

On pose $b_n = \beta_n - 2$

Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{b_{n+1} = \beta_{n+1} - 2 = -2 + 2\beta_n - 2 = 2\beta_n - 4 = 2(\beta_n - 2) = 2b_n}$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n = 2^n b_0 = 2^n(\overbrace{\beta_0}^{=1} - 2) = -2^n$.

Ainsi $\boxed{\beta_n = 2 + b_n = 2 - 2^n}$

et $\boxed{\alpha_n = 1 - \beta_n = -1 + 2^n}$

On conclut,

$$A^n = \alpha_n A + \beta_n I$$
$$= (-1 + 2^n)A + (2 - 2^n)I = \boxed{2I - A + 2^n(A - I)}$$

(Formidable : encore la même chose !)

d) On résout :

$$P\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} x+y+z=\alpha \\ x \qquad +3z=\beta \\ \quad -y+z=\gamma \end{cases}$$

$$\underset{L_2\leftarrow L_2-L_1}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x+y+z=\alpha \\ -y+2z=\beta-\alpha \\ -y+z=\gamma \end{cases}$$

$$\underset{L_3\leftarrow L_3-L_1}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x+y+z=\alpha \\ -y+2z=\beta-\alpha \\ -z=\alpha-\beta+\gamma \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x=\alpha-y-z=3\alpha-2\beta+3\gamma \\ y=\alpha-\beta-2\alpha+2\beta-2\gamma=-\alpha+\beta-2\gamma \\ z=-\alpha+\beta-\gamma \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-2&3\\-1&1&-2\\-1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$$

Donc P est inversible, $\boxed{P^{-1}=\begin{pmatrix}3&-2&3\\-1&1&-2\\-1&1&-1\end{pmatrix}}$.

$$A=\begin{pmatrix}0&1&-1\\-3&4&-3\\-1&1&0\end{pmatrix} \quad P=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&3\\0&-1&1\end{pmatrix}$$

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}3&-2&3\\-1&1&-2\\-1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-2&3\\-1&1&-2\\-2&2&-2\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

ii) On a $\forall n\in\mathbb{N}$, $\Delta^n=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&2^n\end{pmatrix}=I+(2^n-1)\begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&&1\end{pmatrix}$

On a $\Delta = P^{-1} A P$,

par récurrence $\Delta^n = P^{-1} A^n P$

i.e $A^n = P \Delta^n P^{-1}$.

donc $A^n = P \left(I + (2^n - 1) \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \right) P^{-1}$

$= I + (2^n - 1) \; P \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$.

Il ne reste plus qu'à faire les calculs de $P \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$ (On espère vraiment trouver $A - I$).

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

On a bien $P \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = A - I$.

Finalement, $A^n = I + (2^n - 1)(A - I)$

$= 2I - A + 2^n (A - I)$ (Encore !)

e) On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = 2I - A + 2^n(A-I)$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, réalisons le produit :

$$(2I - A + 2^{-n}(A-I)) \times (2I - A + 2^n(A-I))$$

$$= (D + 2^{-n}C) \times (D + 2^n C)$$

$$= \underbrace{D^2}_{=D} + \underbrace{2^n DC}_{=O_3} + \underbrace{2^{-n}CD}_{=0} + \underbrace{2^0 C^2}_{=C}$$

$$= D + C$$

$$= A - I + 2I - A$$

$$= \boxed{I}$$

Donc on a bien : $D + 2^{-n}C = (A^n)^{-1}$

Autrement dit, même pour les entiers négatifs, on a $\boxed{A^n = D + 2^n C}$

$\forall n \in \mathbb{Z}$, $\boxed{A^n = D + 2^n C}$

3.a $\bullet$ $\mathcal{C}(M) \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

$\bullet$ Comme $O_3 \times M = M \times O_3 = O_3$, on a $O_3 \in \mathcal{C}(M)$

$\bullet$ Soit $(N_1, N_2) \in \mathcal{C}(M)^2$, i.e $\begin{cases} N_1 M = M N_1 \\ N_2 M = M N_2. \end{cases}$

On a alors $\begin{cases} (N_1 - N_2) M = N_1 M - N_2 M \\ \qquad = M N_1 - M N_2 \\ \qquad = M(N_1 - N_2) \end{cases}$

Donc $\underline{\underline{N_1 - N_2 \in \mathcal{C}(M)}}$

$\circ$ et $(N_1 N_2) M = N_1 M N_2 = M(N_1 N_2)$

donc $N_1 N_2 \in \mathcal{C}(M)$.

$\circ$ Enfin, $I_3 \times M = M I_3$ donc $\boxed{I_3 \in \mathcal{C}(M)}$

Conclusion : $\mathcal{C}(M)$ est un sous-anneau de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

b Si $N \in \mathcal{C}(M)$ et est inversible,

on a $NM = MN$

donc $N^{-1} N M = N^{-1} M N$

i.e $M = N^{-1} M N$

puis $M N^{-1} = N^{-1} M N \times N^{-1}$

d'où $M N^{-1} = N^{-1} M$ donc $\boxed{N^{-1} \in \mathcal{C}(M)}$

$\boxed{c}$ On rappelle que $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$.

Soit $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

Alors

$$N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$\Delta = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 2g & 2h & 2i \end{pmatrix}\right] = \Delta N$$

$$N \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} a & b & 2c \\ d & e & 2f \\ g & h & 2i \end{pmatrix}}_{= N\Delta}$$

Donc $N\Delta = \Delta N \iff \begin{cases} a = a \\ b = b \\ 2c = c \\ d = d \\ e = e \\ 2f = f \\ g = 2g \\ h = 2h \\ 2i = 2i \end{cases} \iff \begin{cases} c = 0 \\ f = 0 \\ g = 0 \\ h = 0 \end{cases}$

$$\iff M = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$$

Donc $\mathcal{C}(\Delta) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}, (a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^5 \right\}$.

d) $\boxed{N \in \mathcal{C}(M)} \Longleftrightarrow MN = NM \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow Q^{-1} M N Q = Q^{-1} N M Q$

$\Longleftrightarrow (Q^{-1} M Q)(Q^{-1} N Q) = (Q^{-1} N Q)(Q^{-1} M Q)$

$\Longleftrightarrow Q^{-1} N Q$ commute avec $Q^{-1} M Q$.

$\Longleftrightarrow \boxed{Q^{-1} N Q \in \mathcal{C}(Q^{-1} M Q)}$

e) On a. $N \in \mathcal{C}(A) \Longleftrightarrow P^{-1} N P \in \mathcal{C}(\underbrace{P^{-1} A P}_{= \Delta})$

$$\Longleftrightarrow \exists (\lambda_1, \dots \lambda_5) \in \mathbb{R}^5 \;/\; P^{-1} N P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & 0 \\ \lambda_3 & \lambda_4 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \exists (\lambda_1 \dots \lambda_5) \in \mathbb{R}^5 \;/\; N = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & 0 \\ \lambda_3 & \lambda_4 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_5 \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$\Longleftrightarrow \exists (\lambda_1 \dots \lambda_5) \in \mathbb{R}^5 \;/\; N = \lambda_1 \underbrace{P E_{11} P^{-1}}_{= J_1} + \lambda_2 \underbrace{P E_{12} P^{-1}}_{= J_2} + \lambda_3 \underbrace{P E_{21} P^{-1}}_{= J_3} + \lambda_4 \underbrace{P E_{22} P^{-1}}_{= J_4} + \lambda_5 \underbrace{P E_{33} P^{-1}}_{= J_5}$$

On a donc $\mathcal{C}(M) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i J_i \;,\; (\lambda_1, \dots \lambda_5) \in \mathbb{R}^5 \right\}$

(Rem: bientôt, on pourra dire que $\boxed{\mathcal{C}(M) = \text{vect}(J_1, \dots, J_5)}$).