

DM n°4.

Problème 1

Pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, on note $T(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a+c & b \\ c & b & a \end{pmatrix}$. On considère l'ensemble S défini par

$$S = \{T(a, b, c) \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$$

On pose $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Partie I

- Montrer que S est un sous-groupe de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
- Exprimer A^2, B^2, AB et BA à l'aide de I, A et B .
 - Soient (a, b, c) et (a', b', c') dans $\mathbb{R}^3$, $M = T(a, b, c)$ et $M' = T(a', b', c')$. Calculer le produit MM' .
 - Montrer que S est un sous-anneau de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Est-il commutatif?
 - L'anneau S est-il un corps ?
- Cette question est consacrée à la recherche des éléments inversibles de l'anneau S .
 - On reprend les notations de la question 2. Calculer, lorsque c'est possible, a', b' et c' en fonction de a, b et c pour que $MM' = I$.
 - Quels sont les éléments inversibles de l'anneau ?

Partie II

Une matrice M est dite orthogonale si $M \times {}^tM = {}^tM \times M = I$.

- Montrer M est orthogonale si et seulement si $M^{-1} = {}^tM$.
- Soit $M \in S$. Montrer que M est orthogonale si et seulement si
$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 1 \\ b^2 + 2ac = 0 \\ b(a+c) = 0 \end{cases}.$$
- En déduire toutes les matrices orthogonales appartenant à S .

Partie III

Dans cette partie, on note $K = \frac{1}{\sqrt{2}}A$ et $M = T(1, \sqrt{2}, 0)$. On se propose de calculer les puissances de K puis celles de M .

1. Calculer K^2, K^3 puis K^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ suivant la parité de n .
2. Exprimer M à l'aide de I et de K et montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, M^n = I + a_n K + b_n K^2$ avec

$$a_n = \sum_{1 \leq k \leq n, k \text{ impair}} \binom{n}{k} 2^k \quad \text{et} \quad b_n = \sum_{1 \leq k \leq n, k \text{ pair}} \binom{n}{k} 2^k$$
3. Calculer $1 + a_n + b_n$ et $1 - a_n + b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire a_n et b_n en fonction de n .
4. Conclure en exprimant M^n comme combinaison linéaire de I, A et B .

Problème 2 (facultatif)

L'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit $\sim$ la relation binaire sur $\mathbb{Z}^2$ telle que $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in n\mathbb{Z}$

1. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence (l'interpréter en terme de congruence).
2. Expliquer brièvement combien de classes d'équivalence il existe sur $\mathbb{Z}$ pour cette relation d'équivalence.
 Dans la suite, on note $\mathbb{Z}/(n\mathbb{Z})$ ou plus simplement $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ l'ensemble des classes d'équivalence. Pour $k \in \mathbb{Z}$, on note $\bar{k} = k + n\mathbb{Z}$ la classe d'équivalence de k . On munit $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ de la loi de composition $+$ de la manière suivante : $\bar{k} + \bar{l} = \overline{k+l}$.
3. Justifier que la loi de composition $+$ est bien définie (attention : lorsqu'on écrit $\bar{k}$, d'autres entiers que k pourraient aussi bien convenir).
4. Montrer que $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ est un groupe commutatif
5. Soit $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. On définit

$$\theta : \begin{cases} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{U}_n \\ \bar{k} \mapsto \omega^k \end{cases}$$

Justifier que θ est bien définie (attention : lorsqu'on écrit $\bar{k}$, d'autres entiers que k pourraient aussi bien convenir).

6. Montrer que θ est un isomorphisme.

On s'intéresse maintenant à une nouvelle loi de composition : pour $\bar{k}, \bar{l} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\bar{k} \times \bar{l} = \overline{kl}$

7. Justifier que $\times$ est bien définie.
8. Montrer que $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$ est un anneau.
9. Dans le cas général, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est-il un corps ? Est-il intègre ?

