

Correction du DS n°4.

durée : 4 heures

Question de cours

/5. 1 point pour l'énoncé seul, 2 pour la construction des suites $(a_n)_n \in \mathbb{N}$ et $(b_n)_n \in \mathbb{N}$, 1 pour dire qu'elles convergent, 1 pour expliquer comment choisir ϕ_n .

Exercice 1

Cela revient à résoudre l'équation différentielle

$$y' + \tan(t)y = \sin(2t), y(0) = 1 \text{ sur }]-\pi/2, \pi/2[$$

La solution générale de l'équation homogène est donnée par $t \mapsto \lambda \cos t$, $\lambda \in \mathbb{R}$. On cherche une solution particulière par la méthode de variation de la constante et posant $y(t) = C(t) \cos(t)$. Introduisant cette fonction dans l'équation, et tenant compte de la formule $\sin(2t) = 2 \sin(t) \cos(t)$, on trouve $C'(t) = 2 \sin(t)$ dont une primitive est $t \mapsto -2 \cos t$. Une solution particulière de l'équation différentielle est donc donnée par la fonction $t \mapsto -2 \cos^2 t$. Les solutions de l'équation sont alors les fonctions vérifiant $t \mapsto \lambda \cos t - 2 \cos^2 t$. On cherche la solution valant 1 en 0. On trouve $\lambda - 2 = 1$, soit $\lambda = 3$. Ainsi, la solution recherchée est la fonction $t \mapsto -2 \cos^2 t + 3 \cos t$.

/5. 0.5 pour diviser par $\cos(t)$ bien que en toute rigueur, il aurait aussi fallu justifier que $\cos$ ne s'annule pas sur $]-\pi/2, \pi/2[$, puis 1.5 point pour le reste de la résolution de l'équation homogène (dont 1 point pour primitiver correctement tangente). Enfin 2 points pour trouver une solution particulière, obtenir l'ensemble des solutions et trouver la bonne constante

Exercice 2 : une suite récurrente

1. Puisque $x \mapsto 2/x$ est décroissante, la fonction f est décroissante sur $[1, 3]$. De plus, $f(1) = 3$ et $f(3) = 5/3 > 1$. L'intervalle $[1, 3]$ est bien stable par f , ce qui entraîne en particulier que la suite (u_n) est bien définie et que $u_n \in [1, 3]$ pour tout entier n . /2.5 dont 1.5 pour dire que l'ensemble est bien stable. Nombreux ont répondu quelque chose de vrai (les 2 suites extraites sont de monotonies contraires), j'ai compté 1 pt (c'est l'esprit de Noël) mais il fallait en conclure que tous les termes restaient dans l'intervalle $[1, 3]$, cela servait à la fin de l'exercice pour justifier que les suites v et w étaient bornées

2. Puisque $v_{n+1} = u_{2n+2} = f \circ f(u_{2n})$, on pose $g = f \circ f$ qui laisse bien sûr stable l'intervalle $[1, 3]$. Puisque la composée de deux fonctions décroissantes est une fonction croissante, g est croissante sur $[1, 3]$. De plus, on a $u_1 = 3$, $u_2 = 5/3 > u_0$

et donc $v_1 \geq v_0$. On prouve alors par récurrence sur n que la suite (v_n) est croissante, ie que pour tout n on a $v_{n+1} \geq v_n$. C'est vrai pour $n = 0$ et si c'est vrai au rang n , il suffit d'utiliser la croissance de g sur $[1, 3]$ pour démontrer que $1 \leq v_n \leq v_{n+1} \leq 3 \implies v_{n+1} = g(v_n) \leq g(v_{n+1}) = v_{n+2}$. /2. C'est un résultat qui a été vu en cours mais qui n'est pas utilisable (on ne peut pas se contenter de répondre : "le cours dit que les 2 suites vont autre montones de monotonies contraires). Il y avait une récurrence à faire, 2 pts pour ceux qui l'ont faite correctement, et 0.5 (encore l'esprit de Noël) pour ceux qui ont juste dit "c'est le cours"

3. Remarquons ensuite que $w_n = f(v_n)$. Ainsi, de la décroissance de f sur $[1, 3]$ et de l'inégalité $v_n \leq v_{n+1}$, on déduit l'inégalité $w_n = f(v_n) \geq f(v_{n+1}) = w_{n+1}$.

Autrement dit, (w_n) est décroissante. /1. Il n'était pas nécessaire de refaire une récurrence, lagré tout, ceux qui l'ont faite correctement ont eu le point, mais il y avait bien plus rapide

4. Puisque (v_n) est croissante et majorée et que (w_n) est décroissante et minorée, on en déduit que ces deux suites sont convergentes. Leur limite respective est un élément de $[1, 3]$ vérifiant l'équation $g(x) = x$. Or, $g(x) = 1 + \frac{2}{1+\frac{2}{x}} = \frac{3x+2}{x+2}$.

L'équation $g(x) = x$ est donc équivalente à $x^2 - x - 2 = 0 \iff x = 2$ ou $x = -1$.

La seule solution dans $[1, 3]$ est 2, donc les deux suites convergent vers la même limite, à savoir 2. /4. 1 point pour dire croissante majorée (et décroissante minorée) implique convergente, et 3 points pour chercher les points fixes de

$f \circ f$. Nombreux se sont contenté de chercher les points fixes de f : cela aurait été valable si l'on cherchait une limite éventuelle de u , mais pour les suites v et w la fonction qui permet de définir ces deux suites est bien $f \circ f$. Par "chance", f et $f \circ f$ avaient exactement les mêmes points fixes (rem anecdotique : on a toujours une inclusion mais pas toujours égalité de l'ensemble des pts fixes de f et de $f \circ f$). Ceux qui ont donc cherché les pts fixes de f ont eu tort mais ont été crédité d'un demi point pour l'idée de chercher les pts fixes.

5. Puisque (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent toutes deux vers 2, on en déduit que (u_n) est elle aussi convergente vers 2. /1 point

Exercice 3 : Un anneau d'entiers

1. Il suffit de prouver que c'est un sous-anneau de $(\mathbb{R}, +, \times)$. Mais $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ est -

- (a) stable par la loi $+$: $(a + b\sqrt{2}) + (a' + b'\sqrt{2}) = (a + a') + (b + b')\sqrt{2}$.
- (b) stable par la loi $\times$: $(a + b\sqrt{2}) \times (a' + b'\sqrt{2}) = (aa' + 2bb') + (ab' + a'b)\sqrt{2}$.
- (c) stable par passage à l'opposé $-(a + b\sqrt{2}) = -a + (-b)\sqrt{2}$.

De plus, $1 \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, ce qui achève la preuve du fait que $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ est un sous-anneau de $\mathbb{R}$.

/3. Nombreux sont revenus à la définition même d'anneaux : ensembles munis de deux lois vérifiant tout un tas de propriétés. Ce n'est pas du tout ce qu'il fallait faire, et généralement, dans ces cas, l'essentiel n'était pas prouvé : la stabilité par addition, l'appartenance de 1 à l'ensemble, etc. Donc dans ce cas, 0 point (ce n'est pas l'esprit de Noël, mais on retiendra que pour ce genre de question, il faut montrer que c'est un sous-anneau d'un anneau "de référence")

2. Comme $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] \subseteq \mathbb{R}$, quel que soit $(x, y) \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]^2$, on a aussi $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, donc

$$xy = yx \text{ car } \mathbb{R} \text{ est commutatif}$$

$$xy = 0 \implies (x = 0 \text{ ou } y = 0) \text{ car } \mathbb{R} \text{ est int\grave{e}gre}$$

Ainsi $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ est commutatif et int\grave{e}gre. /1.5. Dont 0.5 pour la commutativité (il n'était pas nécessaire de mettre x et y sous la forme $a + b\sqrt{2}$ et $a' + b'\sqrt{2}$, ceux qui l'ont fait n'ont pas eu tort mais ont perdu du temps). 1 point pour prouver qu'il est int\grave{e}gre, avec généralement +0.5 pour ceux qui n'ont pas réussi mais savait ce qu'il s'agissait de prouver (i.e. maîtrise la notion "être int\grave{e}gre")

3. Soit $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, par définition il existe donc deux entiers a et b tels que $x = a + b\sqrt{2}$. Prouvons l'unicité : soit $(a', b') \in \mathbb{Z}^2$ tel que $a + b\sqrt{2} = a' + b'\sqrt{2}$. On a alors $a - a' = (b - b')\sqrt{2}$. On a alors deux possibilités

Premier cas : si $b \neq b'$ alors on aurait $\sqrt{2} = \frac{a-a'}{b-b'}$ ce qui serait absurde car on aurait alors $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ ce qui est faux.

Deuxième cas (et seul possible) on a $b = b'$ et donc $a - a' = 0$ i.e. $a = a'$. On voit donc que $(a', b') = (a, b)$ ce qui garantit l'unicité d'un tel couple. /2. Il ne fallait surtout pas répondre "par identification $a + b\sqrt{2} = a' + b'\sqrt{2} \implies (a = a' \text{ et } b = b')$ " parce que le but était justement de justifier pourquoi cette implication est vraie. Elle n'a rien d'évidente, posez vous la question : est-il vrai que pour des entiers a, b, a', b' on a $a + b\sqrt{2} = a' + b'\sqrt{2} \implies (a = a' \text{ et } b = b')$? (rem : trouvez un contre-exemple)

4. La fonction N est bien définie, car pour tout $z \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, il n'y a qu'un unique couple (a, b) qui permet d'écrire $z = a + b\sqrt{2}$, ainsi il n'y a pas d'ambiguïté : ce a et ce b sont bien associés de manière unique à z . De plus, comme a et b sont entiers, on a $a^2 - 2b^2 \in \mathbb{Z}$

5. Posons $x = a + b\sqrt{2}$ et $y = a' + b'\sqrt{2}$. En tenant compte de la formule pour le produit obtenue à la question précédente, on a

$$\begin{aligned} N(xy) &= (aa' + 2bb')^2 - 2(ab' + a'b)^2 \\ &= (aa')^2 - 2(ab')^2 - 2(a'b)^2 + 4(bb')^2. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} N(x) \times N(y) &= (a^2 - 2b^2)(a'^2 - 2b'^2) \\ &= (aa')^2 - 2(ab')^2 - 2(a'b)^2 + 4(bb')^2. \end{aligned}$$

6. Soit $x = a + b\sqrt{2}$. Supposons d'abord que x est inversible, d'inverse y . Alors $N(xy) = N(1) = 1$, et donc $N(x)N(y) = 1$. Puisque $N(x)$ et $N(y)$ sont tous les deux des entiers, on a nécessairement $N(x) = \pm 1$. Réciproquement, si $N(x) = \pm 1$, alors, en utilisant la quantité conjuguée : $\frac{1}{a + b\sqrt{2}} = \frac{a - b\sqrt{2}}{a^2 - 2b^2} = \pm(a - b\sqrt{2})$

ce qui montre que $a + b\sqrt{2}$ est inversible, d'inverse $\pm(a - b\sqrt{2})$. /1. Calculatoire

7. En prenant le nombre $2 = 2 + 0 \times \sqrt{2}$, on a $N(2) = 2^2 - 2 \times 0^2 = 4$, donc 2 n'est pas inversible dans cet anneau, donc il ne s'agit pas d'un corps. /1. Dont 0.5 pour les copies qui disaient par ex "2 n'est pas inversible dans l'anneau" sans aucune justification, alors que la question précédente était là pour donner une CNS d'inversibilité et devait être utilisée

Exercice 4

1. Propriétés des bornes supérieure et inférieure : toute partie non vide de $\mathbb{R}$ majorée [resp. minorée] admet une borne supérieure [resp. une borne inférieure].

/1. Question mal formulée

2. (a) A et B sont bornées donc $\exists(M, M') \in \mathbb{R}^2$ tels que $\forall(a, b) \in A \times B, |a| \leq M$ et $|b| \leq M'$.

On en déduit que : $\forall x \in A + B, \exists(a, b) \in A \times B$ tels que $x = a + b$ d'où $|x| \leq |a| + |b| \leq M + M'$ donc $A + B$ est bornée

$A + B$ est donc une partie non vide de $\mathbb{R}$, car A et B le sont, et bornée donc

$\sup(A + B)$ et $\inf(A + B)$ existent. /2 : un point pour montrer que $A + B$ est bornée, et un point pour conclure

- (b) • $\forall x \in A + B, \exists(a, b) \in A \times B, x = a + b$ d'où $x \leq \sup(A) + \sup(B)$. On a donc $\sup(A) + \sup(B)$ majorant de $A + B$ et comme $\sup(A + B)$ est le plus petit des majorants de $A + B$, on obtient $\sup(A + B) \leq \sup(A) + \sup(B)$.

De plus, $\forall(a, b) \in A \times B, a + b \in A + B$ donc $a + b \leq \sup(A + B)$ soit $a \leq \sup(A + B) - b$. On a donc $\sup(A + B) - b$ majorant de A et par définition de $\sup(A)$, on obtient $\forall b \in B, \sup(A) \leq \sup(A + B) - b$.

Donc $\forall b \in B, b \leq \sup(A + B) - \sup(A)$: $\sup(A + B) - \sup(A)$ est donc un majorant de B d'où $\sup(B) \leq \sup(A + B) - \sup(A)$.

Conclusion : $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$

- Le raisonnement est identique pour $\inf(A + B)$.

$\forall x \in A + B, \exists(a, b) \in A \times B, x = a + b$ d'où $x \geq \inf(A) + \inf(B)$. On a donc $\inf(A) + \inf(B)$ minorant de $A + B$ et comme $\inf(A + B)$ est le plus grand des minorants de $A + B$, on obtient $\inf(A + B) \geq \inf(A) + \inf(B)$.

De plus, $\forall(a, b) \in A \times B, a + b \in A + B$ donc $a + b \geq \inf(A + B)$ soit $a \geq \inf(A + B) - b$. On a donc $\inf(A + B) - b$ minorant de A et par définition de $\inf(A)$, on obtient $\forall b \in B, \inf(A) \geq \inf(A + B) - b$.

Donc $\forall b \in B, b \geq \inf(A + B) - \inf(A)$: $\inf(A + B) - \inf(A)$ est donc un minorant de B d'où $\inf(B) \geq \inf(A + B) - \inf(A)$.

Conclusion : $\inf(A + B) = \inf(A) + \inf(B)$

/3. 1 point pour montrer que $\sup(A) + \sup(B)$ est un majorant et en déduire qu'il est plus grand (mais on ne sait pas tout de suite qu'il est égal !) que $\sup(A + B)$ et 2 pts pour le reste

3. (a) En réutilisant les notations du 1 (a), on a : $\forall x \in AB, \exists(a, b) \in A \times B$ tels que $x = ab$ d'où

$|x| = |a| \times |b| \leq MM'$ donc AB est bornée

AB est donc une partie non vide de $\mathbb{R}$, car A et B le sont, et bornée donc $\sup(AB)$ existe. /2. Pour ne pas

s'embêter avec des nombres négatifs qui modifieraient les sens des inégalités. Majorer les valeurs absolues évitait ce problème.

- (b) Prenons $A = \{1, -2\}$ et $B = \{-1\}$ d'où $AB = \{-1, 2\}$
 donc $\sup(AB) = 2$ et $\sup(A) \times \sup(B) = 1 \times (-1) = -1$. Donc $\sup(AB) \neq \sup(A) \times \sup(B)$. /1. Il fallait donner un exemple bien concret en explicitant quels ensembles A et B on choisissait
- (c) $\forall x \in AB, \exists (a, b) \in A \times B, x = ab$. Or $0 < a \leq \sup(A)$ et $0 < b \leq \sup(B)$ d'où $0 < x \leq \sup(A) \times \sup(B)$. On a donc $\sup(A) \times \sup(B)$ majorant de AB et par définition de $\sup(AB)$, on obtient $\sup(AB) \leq \sup(A) \times \sup(B)$.
 De plus, $\forall (a, b) \in A \times B, ab \in AB$ donc $0 < ab \leq \sup(AB)$ d'où $a \leq \frac{\sup(AB)}{b}$ comme $b > 0$. On a donc $\frac{\sup(AB)}{b}$ majorant de A et par définition de $\sup(A)$, on obtient $\forall b \in B, \sup(A) \leq \frac{\sup(AB)}{b}$.
 Donc $\forall b \in B, b \leq \frac{\sup(AB)}{\sup(A)} \cdot \frac{\sup(A)}{\sup(AB)}$ est donc un majorant de B d'où $\sup(B) \leq \frac{\sup(AB)}{\sup(A)}$.

Conclusion : $\sup(AB) = \sup(A) \times \sup(B)$ /3 points. Question très peu réussie

Problème 1 : Étude d'une suite définie implicitement

On désigne par n un entier naturel non nul et l'on se propose d'étudier les racines de l'équation

$$\ln x + x = n$$

À cet effet, on introduit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^{++}$ par

$$\forall x > 0, \quad f(x) = \ln x + x$$

Partie I. Existence des racines de

1. f est continue et strictement croissante comme somme de deux fonctions continues et strictement croissantes, et ses limites en $+\infty$ et en $0+$ sont $+\infty$ et $-\infty$
2. D'après le théorème de la bijection : $\mathbb{R}^{++}$ est un intervalle, f est continue et strictement croissante, donc f réalise une bijection de $\mathbb{R}^{++}$ vers $f(\mathbb{R}^{++})$ or d'après le calcul des limites, on a $f(\mathbb{R}^{++}) = \mathbb{R}$ ainsi f réalise une bijection de $\mathbb{R}^{++}$ vers $\mathbb{R}$. /1. Il faut bien penser à citer le théorème de la bijection. Pensez bien que dire "f est une bijection" n'a pas de sens : il faut dire de quel ensemble vers quel autre
En particulier, tout entier naturel non nul $n \in \mathbb{N}^*$, admet un unique antécédent par f . Autrement dit, l'équation (??) admet une unique racine réelle et positive, que l'on note x_n .
3. On a $f(x_n) = n < n+1$ et $\lim f(x) = +\infty$ et f est continue sur l'intervalle $[x_n; +\infty[$ dont en appliquant le TVI, il y a une solution au problème $f(x) = n+1$ sur cet intervalle, or on sait que cette solution est unique et qu'il s'agit en fait de x_{n+1} , donc on a bien $x_{n+1} \in]x_n; +\infty[$, i.e $x_{n+1} > x_n$. /2.
4. Comme $\ln 1 = 0, x_1 = 1$, car on sait qu'il n'y a qu'une unique solution. /0.5

Partie II. Étude de la convergence de la suite (x_n)

1. On étudie la fonction $g : x \mapsto x - \ln(x)$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}^{++}$ dont la dérivée vérifie $\forall x \in \mathbb{R}^{++}, g'(x) = 1 - \frac{1}{x}$, qui est positif ssi $x \geq 1$, donc g admet un minimum en 1 qui vaut 1, i.e. $\forall x \in \mathbb{R}^{++}, g(x) \geq g(1) = 1$ donc $\forall x \in \mathbb{R}^{++}, x - \ln(x) \geq 0$ /1.5. L'étude de fonction était attendu, les raisonnements par convexité n'ayant pas encore été faits en cours
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, comme x_n est la solution de (??), il résulte de l'inégalité $\ln(x_n) \leq x_n$ que

$$\begin{aligned} x_n &= n - \ln(x_n) \leq n \\ x_n &= n - \ln(x_n) \geq n - x_n \end{aligned}$$

D'où l'on tire l'encadrement

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{n}{2} \leq x_n \leq n$$

/1. peu traitée

3. Comme la suite $(n/2)$ diverge vers $+\infty$, d'après le théorème de divergence par comparaison la suite (x_n) est elle aussi divergente vers $+\infty$. /0.5. Attention, le théorème des gendarmes correspond au cas où l'on a encadré notre suite par deux autres qui convergent vers la même limite. Ici il n'y a pas convergence et au final on a uniquement besoin de la limite de la suite la plus petite.

Partie III. Développement asymptotique de la suite (x_n)

1. - $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty \Rightarrow \ln(x_n) = o(x_n)$ D'après la caractérisation des équivalents par la différence, on a
- $\ln(x) = o(x)$

$$n = x_n + \ln(x_n) \sim x_n$$

/1

2. Remarquons tout d'abord que l'équivalence ci-dessus entraîne que $\frac{x_n}{x_{n+1}} \sim \frac{n}{n+1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$. D'après la caractérisation séquentielle de la continuité pour le logarithme, il en résulte que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \frac{x_n}{x_{n+1}} = 0$$

- Or, par définitions de x_n et de x_{n+1} , nous avons

$$x_{n+1} - x_n = n + 1 - \ln x_{n+1} - n + \ln x_n = 1 + \ln \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} \right)$$

Par opérations algébriques, j'en déduis que $x_{n+1} - x_n$ est convergente de limite 1. /2 Peu traitée : mais surtout : il est interdit de soustraire des équivalents.

3. On définit pour tout entier naturel non nul $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{n - x_n}{\ln(n)}$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par définition de x_n , nous avons :

$$u_n - 1 = \frac{n - x_n}{\ln(n)} - 1 = \frac{\ln x_n - \ln(n)}{\ln(n)} = \frac{\ln(x_n/n)}{\ln(n)}$$

- (b) Ainsi que nous l'avons prouvé précédemment, $x_n \sim n$. Autrement dit, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{n} = 1$. Par la caractérisation séquentielle de la continuité pour le logarithme, il en résulte que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln x_n/n = 0$. Comme $\ln(n)$ est divergente vers $+\infty$, il vient finalement (par opérations algébriques) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$$

/1.

(c)

$$u_n - 1 = \frac{\ln(x_n/n)}{\ln(n)} = \frac{\ln(1 - 1 + x_n/n)}{\ln(n)}$$

Faisons le changement de variable $\left. \begin{array}{l} - h_n = -1 + x_n/n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \\ - \ln(1 + h) \sim_0 h \end{array} \right\} \Rightarrow u_n - 1 \sim \frac{x_n - n}{n \ln(n)} = -\frac{\ln(x_n)}{n \ln(n)}$ Comme de plus $x_n \sim n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$, il en résulte que $\ln x_n \sim \ln(n)$. Il en résulte finalement que

$$1 - u_n \sim \frac{1}{n}$$

/1

4. Par définition de u_n et l'équivalence ci-dessus, il existe une fonction ε définie au voisinage de 0 telle que $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$ et, pour tout entier supérieur ou égal à 2 :

$$1 - u_n = 1/n + 1/n\varepsilon(1/n)$$

Comme $u_n = \frac{n - x_n}{\ln(n)}$, j'en déduis que

$$x_n = n - \ln(n) + \frac{\ln(n)}{n} + \frac{\ln(n)}{n} \varepsilon(1/n).$$

Problème 2 : Équations différentielles linéaires d'ordre 2

Partie I. Équations différentielles linéaires à coefficients constants

1. Second membre polynôme-exponentielle

Réolvons l'équation

$$y'' - 2y' + y = (t^2 + 1)e^t$$

- Résolution de l'équation homogène

L'équation caractéristique est $r^2 - 2r + 1 = 0$ qui admet 1 comme racine double. En conséquence, les solutions de l'équation homogène associée sont toutes les fonctions de la forme

$$t \mapsto h(t) = (C_1 + C_2 t)e^t, (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

- Recherche d'une solution particulière

Comme 1 est racine double de l'équation caractéristique, (F_1) a une solution particulière de la forme

$$\begin{aligned} 1 \times & \left\{ \begin{array}{l} y_0(t) = (at^4 + bt^3 + ct^2)e^t \\ y_0'(t) = [at^4 + (b+4a)t^3 + (c+3b)t^2 + 2ct]e^t \\ y_0''(t) = [at^4 + (b+8a)t^3 + (c+6b+12a)t^2 + (4c+6b)t + 2c]e^t \end{array} \right. \\ -2 \times & \end{aligned}$$

On a alors par identification des coefficients :

$$\begin{aligned} y_0 \text{ est solution de } (F_1) & \iff y_0'' - 2y_0' + y_0 = (t^2 + 1)e^t \\ & \iff \begin{cases} 0a = 0 \\ 2b = 0 \\ a = \frac{1}{12} \\ 2c = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi $y_0(t) = (\frac{1}{2}t + \frac{1}{12}t^4)e^t$ convient. - Expression de la solution générale

Les solutions de (F_1) sur $\mathbb{R}$ sont toutes les fonctions de la forme :

$$t \mapsto f(t) = \left(C_1 + C_2 t + \frac{1}{2}t + \frac{1}{12}t^4 \right) e^t, (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

/6 : 1 pt pour l'équation homogène, 2 pts pour savoir qu'il faut chercher une solution de la forme $t \mapsto t^2 B(t)e^t$ vu que 1 est racine double. +3 pts pour trouver le bon polynôme B et conclure.

2. Second membre exponentielle-trigo a. Réolvons l'équation

$$3y'' + 4y' + y = e^{-t} \sin(t)$$

- Résolution de l'équation homogène

L'équation caractéristique est $3r^2 + 4r + 1 = 0$ qui admet -1 et $-\frac{1}{3}$ comme racines simples. En conséquence, les solutions de l'équation homogène associée sont toutes les fonctions de la forme

$$t \mapsto h(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-t/3}, (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

- Recherche d'une solution particulière

On passe en complexes et on cherche une solution particulière de $\tilde{F}_2$

$$3y'' + 4y' + y = e^{(i-1)t}$$

$\tilde{F}_2$ a une solution particulière de la forme

$$\begin{aligned} 1 \times \parallel \tilde{y}_0(t) &= ae^{(i-1)t} \\ 4 \times \tilde{y}_0(t) &= a(i-1)e^{(i-1)t} \tilde{y}_0'(t) = -2iae^{(i-1)t} \\ 3 \times \end{aligned}$$

On a alors par identification des coefficients :

$$\begin{aligned} \tilde{y}_0 \text{ est solution de } \tilde{F}_2 &\iff 3\tilde{y}_0'' + 4\tilde{y}_0' + \tilde{y}_0 = e^{(i-1)t} \\ &\iff a(-3-2i) = 1 \end{aligned}$$

Ainsi $\tilde{y}_0(t) = \frac{-3+2i}{13}e^{(i-1)t}$ convient. En prenant la partie imaginaire, nous obtenons une solution particulière de (F_2) : $y_0(t) = \frac{1}{13}(3\sin(t) - 2\cos(t))e^{-t}$ - Expression de la solution générale

Les solutions de (F_2) sur $\mathbb{R}$ sont toutes les fonctions de la forme:

$$t \mapsto f(t) = \frac{1}{13}(3\sin(t) - 2\cos(t))e^{-t} + C_1e^{-t} + C_2e^{-t/3}, (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

/6 : 1 pour l'équation homogène (vous n'êtes pas obligé de diviser par 3, l'équation caractéristique tolère des coeff $a \neq 1$, c'est pour l'ordre 1 que l'on veut "obligatoirement" un 1 devant le y' (pour avoir une équation dite résolue)) +1 pt pour penser à dire que le second membre est $im(e^{(-i+1)t})$

b. Pour déterminer l'unique solution de (F_2) qui vérifie en outre $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$, on résout le système d'équation d'inconnues (C_1, C_2) qui suit :

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(0) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 + C_2 = \frac{11}{13} \\ C_1 + \frac{1}{3}C_2 = \frac{5}{13} \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 = -1 \\ C_2 = \frac{24}{13} \end{cases}$$

Ainsi, l'unique solution du problème de Cauchy posé est

$$f(t) = \frac{1}{13}(3\sin(t) - 2\cos(t))e^{-t} - 1e^{-t} + \frac{24}{13}e^{-t/3}$$

/1. Pour les copies qui n'avaient pas le bon résultat à la question 2.a mais où le principe pour déterminer les constantes était correct : +0.5

3. Second membre polynôme-exponentielle-trigo!

Résolvons l'équation

$$y'' + 2y' + y = te^t \cos(t)$$

- Résolution de l'équation homogène

L'équation caractéristique est $r^2 + 2r + 1 = 0$ qui admet -1 comme racine double. En conséquence, les solutions de l'équation homogène associée sont toutes les fonctions de la forme

$$t \mapsto h(t) = (C_1 + C_2t)e^{-t}, (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

- Recherche d'une solution particulière

On passe en complexes et on cherche une solution particulière de $\tilde{F}_3$

$$y'' + 2y' + y = te^{(1+i)t}$$

$(\tilde{F}_3)$ a une solution particulière de la forme

$$\begin{aligned} 1 \times \tilde{y}_0(t) \\ - 2 \times (at + b)e^{(1+i)t} \\ 1 \times \tilde{y}_0(t) \\ \tilde{y}_0''(t) = [(1+i)at + b + (1+i)a]e^{(1+i)t} \\ y'(2iat + 2ib + 2a(1+i))e^{(1+i)t} \end{aligned}$$

On a alors par identification des coefficients :

$$\begin{aligned} \tilde{y}_0 \text{ est solution de } (\tilde{F}_3) &\iff \tilde{y}_0'' + 2\tilde{y}_0' + \tilde{y}_0 = te^{(1+i)t} \\ &\iff \begin{cases} a(3+4i) = 1 \\ 2a(1+i) + b(4i+3) = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a = \frac{3-4i}{25} \\ b = \frac{-4+22i}{125} \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi $\tilde{y}_0(t) = \left(\frac{15t-4}{125} + i\frac{-20t+22}{125}\right)e^{(1+i)t}$ convient. Finalement, en prenant la partie réelle, on obtient comme solution particulière de (F_3) , la fonction $t \mapsto y_0(t) = \left(\frac{15t-4}{125} \cos(t) + \frac{20t-22}{125} \sin(t)\right)e^t$. - Expression de la solution générale

Les solutions de (F_3) sur $\mathbb{R}$ sont toutes les fonctions de la forme:

$$t \mapsto f(t) = \left(\frac{15t-4}{125} \cos(t) + \frac{20t-22}{125} \sin(t)\right)e^t + (C_1 + C_2 t)e^{-t}, (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

/6 : 1 pour l'EH, +1 pour remarquer que le second membre est une partie réelle de "polynome exponentiel" et résoudre une équation en complexe dont on prendra la partie réelle +1 pour dire qu'on cherche un solution de la forme $t \mapsto A(t)e^{(1+i)t}$

Partie II. EDL d'ordre 2 à coefficients continus Étant donné un réel $m \in \mathbb{R}$ fixé, on considère l'équation différentielle

$$(1+t^2)^2 y'' + 2t(1+t^2)y' + m^2 y = 0$$

1. (a) On pose $x = \text{Arctan}(t)$, avec $t \in \mathbb{R}$ et on définit $z :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$ de sorte que

$$y(t) = z(\text{Arctan}(t)) \text{ i.e. } z(x) = y(\tan(x))$$

Comme Arctan et $\tan$ sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ respectivement, il s'ensuit que z est deux fois dérivable dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ si et seulement si y est deux fois dérivable dans $\mathbb{R}$. On a en ce cas :

$$\begin{aligned} m^2 \times \|y(t) &= z(\text{Arctan } t) \\ 2t(1+t^2) \times \|y'(t) &= \frac{1}{1+t^2} z'(\text{Arctan } t) \\ (1+t^2)^2 \times \|y''(t) &= \frac{-2t}{(1+t^2)^2} z'(\text{Arctan } t) + \frac{1}{(1+t^2)^2} z''(\text{Arctan } t) \end{aligned}$$

/2. beaucoup d'erreurs dans la dérivation d'une composée...

(b) Ainsi,

$$\text{ssi} \\ \text{pour tout } x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, z''(x) + m^2 z(x) = 0$$

Ainsi, z est solution dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ de l'EDL d'ordre 2 à coefficients constants :

$$z'' + m^2 z = 0$$

/1.

(c) Les solutions de cette équation sont les fonctions de la forme $z(x) = A \cos(mx) + B \sin(mx)$. Par conséquent, les solutions de (F_4) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme:

$$y(t) = A \cos(m \operatorname{Arctan}(t)) + B \sin(m \operatorname{Arctan}(t))$$

2. Soit $t \in \mathbb{R}$. Posons $x = 2 \operatorname{Arctan}(t)$, de sorte que $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$. On a alors $\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{1+t^2}$, d'où l'on tire successivement
 $-\cos(x) = 2 \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ - $\tan(x) = \frac{2 \tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2t}{1-t^2}$ - $\sin(x) = \tan(x) \times \cos(x) = \frac{2t}{1+t^2}$. /1
3. Finalement, à l'aide des questions précédentes, on obtient pour $m = 2$, les solutions de (F_4) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme:

$$y(t) = A \frac{1-t^2}{1+t^2} + B \frac{2t}{1+t^2} = \frac{at^2 - 2bt - a}{1+t^2}$$