

DM n°5.**Des matrices et des permutations**

Soit n un entier. Étant donnée $\sigma \in S_n$ une permutation de $\{1, \dots, n\}$, on définit la matrice notée $P_\sigma \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, dont le coefficient sur la ligne i et la colonne j est $a_{i,j} = \delta_{i,\sigma(j)}$ (où $\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronecker).

On note $G = \{P_\sigma, \sigma \in S_n\}$ l'ensemble de toutes les matrices qu'il est possible d'obtenir ainsi.

1. Pour $n = 5$ et les permutations $\sigma = (1\ 2\ 3\ 4)$, ainsi que $\tau = (1\ 4\ 2)$ et $\rho = (1\ 2)(3\ 4)$ déterminer les matrices $A = P_\sigma$ et $B = P_\tau$ et $C = P_\rho$
2. σ et σ' étant deux éléments de S_n , calculer $P_\sigma \times P_{\sigma'}$.
3. En déduire que $(G, \times)$ est un sous-groupe de $(GL_n(\mathbb{R}), \times)$
4. Sans effectuer de produit matriciel, et en considérant les matrices A et B données au début de l'exercice, déterminer A^9 et B^7 .
Calculer A^{2024} , A^{2025} , B^{2024} , B^{2025} , C^{2024} et C^{2025} .
5. Montrer que

$$\Phi \begin{cases} S_n & \rightarrow G \\ \sigma & \mapsto P_\sigma \end{cases}$$

est un isomorphisme de groupes.

6. Quel est le cardinal de G ?

Le Rubik's race



Le jeu du Rubik's Race est un support carré de 5×5 cases qui sont toutes occupées par un jeton de couleur sauf une case qui est laissée vide (ce qui permet de faire bouger les jetons, et donc de jouer). Il y a 6 couleurs : **B**leu, **J**aune, **R**ouge, **V**ert, blanc, **O**range, et chaque couleur comporte 4 jetons (on a bien $5^2 = 4 \times 6 + 1$). On appelle "motif" la donnée de la liste des couleurs sur chaque cases. Le grand carré possède un haut et un bas, et l'on considère que deux motifs sont identiques lorsque leurs photos sont identiques.

1. Combien y a-t-il de motifs possibles ?

On applique ensuite un "masque" qui cache les cases extérieures pour ne faire apparaître que les 9 jetons centraux. Un "sous-motif" correspond à un carré de 9 couleurs (avec aucune case vide), que l'on représente par une matrice de couleurs.

2. Combien y a-t-il de motifs qui laissent apparaître le sous-motif

$$\begin{pmatrix} \text{Bleu} & \text{Bleu} & \text{Vert} \\ \text{Rouge} & \text{Jaune} & \text{Vert} \\ \text{Rouge} & \text{Orange} & \text{Blanc} \end{pmatrix}$$

3. Combien y a-t-il de motifs qui laissent apparaître le sous-motif

$$\begin{pmatrix} \text{Bleu} & \text{Bleu} & \text{Vert} \\ \text{Rouge} & \text{Jaune} & \text{Bleu} \\ \text{Rouge} & \text{Orange} & \text{Blanc} \end{pmatrix}$$

4. Un joueur tire un à un les jetons de manière aléatoire et les place sur support carré, et décide également de manière aléatoire de laisser un emplacement vide. Il baisse ensuite le masque.

(a) Avec quelle probabilité obtiendra-t-il le premier sous-motif ?

(b) Avec quelle probabilité obtiendra-t-il le second sous-motif ?

5. Le joueur a aperçu que la case en plein centre du jeu était jaune. Quelle est alors la probabilité qu'il obtienne le premier sous-motif ?