Colle 14 : Matrices, structures algébriques

Résultats et preuves à connaître

Proposition 1 Ensemble des inversibles d'un anneau

L'ensemble des éléments inversibles de l'anneau $(A,+,*)$, noté A^*, est un groupe pour la loi $*$.

Proposition 2 Produit de matrices (On ne démontrera que le premier point : c'est le meilleur !)

Sous condition d'existence,
i) $A\times(B\times C)=(A\times B)\times C$: $\times$ est associative.
ii) $A\times(B+C)=A\times B+A\times C$ et $(A+B)\times C=A\times C+B\times C$: $\times$ est distributive par rapport à $+$.
iii) $\forall\lambda\in\mathbb{K}$, $(\lambda A)\times B=A\times(\lambda B)=\lambda(A\times B)$.

Proposition 3 Transposée

Sous condition d'existence (que l'on devra rappeler),
i) $(A^T)^T=A$
ii) $(A+B)^T=A^T+B^T$
iii) $\forall\lambda\in\mathbb{K}, (\lambda A)^T=\lambda A^T$
iv) $(A\times B)^T=B^T\times A^T$

Proposition 4 Inverse

Soient $(A,B)\in GL_n(\mathbb{K})^2$ alors
i) $\left(A^{-1}\right)^{-1}=A$
ii) $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$
iii) $\forall\lambda\in\mathbb{K}^*$, $(\lambda A)^{-1}=\lambda^{-1}A^{-1}$
iv) $\left(A^T\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^T$

Proposition 5 Trace

Soient $(A,B)\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$. Alors
i) $\operatorname{tr}(A+B)=\operatorname{tr}(A)+\operatorname{tr}(B)$
ii) $\forall\lambda\in\mathbb{K}$, $\operatorname{tr}(\lambda A)=\lambda\operatorname{tr}(A)$
iii) $\operatorname{tr}(A\times B)=\operatorname{tr}(B\times A)$
iv) $\operatorname{tr}(A^T)=\operatorname{tr}(A)$

Proposition 6 Inversibilité dans le cas $n=2$

Soit $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}$.

$A\in GL_2(\mathbb{K})\iff \det(A)=ad-bc\neq 0$ et alors $A^{-1}=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a\end{pmatrix}$.

Proposition 7 Matrices diagonales

- $\mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)+\mathrm{diag}(\mu_1,\dots,\mu_n)=\mathrm{diag}(\lambda_1+\mu_1,\dots,\lambda_n+\mu_n)$
- $\mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\times\mathrm{diag}(\mu_1,\dots,\mu_n)=\mathrm{diag}(\lambda_1\mu_1,\dots,\lambda_n\mu_n)$
- $\forall p\in\mathbb{N},\ \mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)^p=\mathrm{diag}(\lambda_1^p,\dots,\lambda_n^p)$
- $\mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in GL_n(\mathbb{K})\iff\forall i\in[\![1,n]\!],\lambda_i\neq 0$ et $\mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)^{-1}=\mathrm{diag}\left(\dfrac{1}{\lambda_1},\dots,\dfrac{1}{\lambda_n}\right)$

Proposition 8 Matrices triangulaires supérieures

L'ensemble des matrices triangulaires supérieures est un sous anneau de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}),+,\times)$.

Proposition 9 Matrices élémentaires

- $E_{k,\ell}E_{p,q}=\delta_{\ell,p}E_{k,q}$

À savoir faire

- ☐ Calculer un produit de matrices, une transposée de matrices. Déterminer si une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est inversible ou non (et connaître l'inverse dans ce cas).
- ☐ Calculer des puissances d'une matrice donnée en calculant les premières puissances puis en conjecturant une propriété qui se démontre par récurrence.
  Ou en remarquant que $M=\lambda I+A$ où les puissances de A se calculent simplement (nilpotente, ou autre raison).
- ☐ Déterminer si une matrice annulée par un polynôme est inversible ou non (et déterminer l'inverse lorsque cela est possible.)
- ☐ Montrer qu'un ensemble muni d'une loi de composition (respectivement : 2 lois) est un sous-groupe (respectivement : sous-anneau) d'un groupe ou d'un anneau connu.
- ☐ Déterminer si une fonction est un morphisme de groupe/ un morphisme d'anneaux.
- ☐ Déterminer si une loi de composition donnée est : interne/associative/commutative/possède un élément neutre.
  Lorsqu'il existe un élément neutre : déterminer les éléments inversibles.

Ce qu'en dit le programme

Calcul matriciel et systèmes linéaires

Le but de cette section est de présenter une initiation au calcul matriciel. Ainsi, on prépare l'étude géométrique de l'algèbre linéaire menée au second semestre, on revient sur l'étude des systèmes linéaires et on obtient des exemples fondamentaux d'anneaux.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Opérations sur les matrices	
Ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$. Addition, multiplication par un scalaire, combinaisons linéaires.	
Matrices élémentaires.	Toute matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est combinaison linéaire de matrices élémentaires.
Produit matriciel ; bilinéarité, associativité.	Si X est une matrice colonne, AX est une combinaison linéaire des colonnes de A.
Produit d'une matrice élémentaire de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par une matrice élémentaire de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.	Symbole de Kronecker $\delta_{i,j}$.
Transposée d'une matrice.	Notation $A^\top$.
Opérations sur les transposées : combinaison linéaire, produit.	
b) Opérations élémentaires	
Interprétation des opérations élémentaires sur les lignes et sur les colonnes en termes de produit matriciel.	
c) Systèmes linéaires	
Écriture matricielle $AX = B$ d'un système linéaire. Système homogène associé.	
Système compatible.	Le système $AX = B$ est compatible si B est combinaison linéaire des colonnes de A.
Les solutions du système compatible $AX = B$ sont les $X_0 + Y$, où X_0 est une solution particulière et où Y parcourt l'ensemble des solutions du système homogène associé.	On reprend brièvement l'algorithme du pivot, en termes d'opérations élémentaires sur les lignes, dans ce contexte général. Toute technicité est exclue.
e) Anneau des matrices carrées	
Anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.	Non commutativité si $n \geqslant 2$. Exemples de diviseurs de zéro, d'éléments nilpotents.
Matrice identité, matrice scalaire.	Notation I_n.
Matrices symétriques, antisymétriques.	Notations $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$, $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.
Formule du binôme.	Application au calcul de puissances.
Produit de matrices diagonales, de matrices triangulaires supérieures, inférieures.	
Matrice inversible, inverse. Groupe linéaire.	Notation $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.
Inverse d'une transposée.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Les opérations élémentaires préservent l'inversibilité.	
Calcul de l'inverse d'une matrice, par opérations élémentaires ou par résolution du système $AX = Y$.	Toute technicité est exclue.
Condition nécessaire et suffisante d'inversibilité d'une matrice triangulaire ; l'inverse d'une matrice triangulaire inversible est triangulaire.	Cas particulier des matrices diagonales.