Colle 13 : Structures algébriques

Résultats et preuves à connaître

Proposition 1 Équivalents usuels Tous sont à connaître, seul $\sin(u_n)$ et $1-\cos(u_n)$ à démontrer

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers 0.

- $\sin(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$
- $1-\cos(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{u_n^2}{2}$
- $\tan(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$
- $\operatorname{sh}(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$
- $1-\operatorname{ch}(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{u_n^2}{2}$
- $\operatorname{th}(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$
- $\ln(1+u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$
- $e^{u_n}-1 \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$
- $(1+u_n)^\alpha - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha u_n \quad (\alpha \neq 0)$

Proposition 2 Lien entre équivalents et petits o

$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ si et seulement si $u_n = v_n + \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$

Proposition 3 Opérations sur $\underset{+\infty}{\sim}$

Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ et $x_n \underset{+\infty}{\sim} y_n$ alors

$u_n x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n y_n$ (produit), $\dfrac{u_n}{x_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{v_n}{y_n}$ (quotient), $u_n^\alpha \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n^\alpha$ (puissance)

Définition 1

Donner les définitions de groupes, anneaux. Donner un exemple (sans démonstration) de groupe commutatif, de groupe non commutatif et un exemple de groupe fini.

Proposition 4 Unicité de l'élément neutre et de l'inverse

Soit $*$ une lci associative sur E

Si $*$ admet un élément neutre, alors il est unique.

Si $x \in E$ admet un inverse alors il est unique, on le notera x^{-1}.

Si x et y sont inversibles, alors $x*y$ l'est aussi et l'on a $(x*y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}$

Proposition 5 Caractérisation des sous-groupes de G

Soit G' un ensemble. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. G' est un sous-groupe de G
2. **SG1** $G' \subset G$
   SG2 $G' \neq \varnothing$
   SG3 $\forall (x,y) \in G'^2, x*y \in G'$ et $x^{-1} \in G'$ (x^{-1} est l'inverse de x dans G)
3. **SG1** $G' \subset G$
   SG2 $G' \neq \varnothing$
   SG3' $\forall (x,y) \in G'^2, x*y^{-1} \in G'$

Proposition 6

Soient $(G,\star)$ et $(H,\otimes)$ deux groupes et $f : G \to H$ un morphisme de groupes.

- $\ker(f)$ est un sous-groupe de $(G,\star)$.
- f est injective si et seulement si $\ker(f) = e_G$

Proposition 7 $\mathbb{U}$ et $\mathbb{U}_n$

$(\mathbb{U}_n,\times)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{U},\times)$ qui est lui-même un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*,\times)$.

Proposition 8

Soient $(G,\star)$ et $(H,\otimes)$ deux groupes et $f : G \to H$ un morphisme de groupes.

- $Im(f)$ est un sous-groupe de $(H,\otimes)$.
- f est surjective si et seulement si $Im(f) = H$

Proposition 9 Calculs dans un anneau

Soit $(A,+,*)$ un anneau, alors pour tout élement $a \in A$

1. $\forall a \in A, \forall (b_1,\dots,b_p) \in A^p, \displaystyle\sum_{i=1}^{p}(a*b_i) = a*\left(\sum_{i=1}^{p} b_i\right)$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{p}(b_i*a) = \left(\sum_{i=1}^{p} b_i\right)*a$
2. $\forall a \in A, \forall n \in \mathbb{N}, (1_A - a)*\left(\displaystyle\sum_{i=0}^{n} a^i\right) = \left(\displaystyle\sum_{i=0}^{n} a^i\right)*(1_A - a) = 1_A - a^{n+1}$

À savoir faire

Exercices : sur les suites et/ou sur les structures algébriques

- ☐ Étude des suites récurrentes donnée par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$: si f est croissante, u est monotone, et si f est décroissante, on étudie les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$. On étudie les points fixes, les intervalles stables par f.
- ☐ Trouver des équivalents en $+\infty$ de suites, s'en servir pour obtenir des limites
- ☐ Montrer qu'un ensemble muni d'une loi de composition) est un sous-groupe d'un groupe connu.
- ☐ Déterminer si une fonction est un morphisme de groupe, déterminer son noyau, son image.
- ☐ Déterminer si une loi de composition donnée est : interne/associative/commutative/possède un élément neutre. Lorsqu'il existe un élément neutre : déterminer les éléments inversibles.

Le programme officiel

Structures algébriques usuelles

Cette section a pour but l'introduction des notions les plus élémentaires relatives aux groupes, anneaux, corps, afin de traiter de manière unifiée un certain nombre de situations.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Loi de composition interne	
Loi de composition interne. Associativité, commutativité, élément neutre, inversibilité, distributivité. Partie stable.	On évite l'étude de lois artificielles. Inversibilité et inverse du produit de deux éléments inversibles.
b) Structure de groupe	
Groupe.	Notation x^n dans un groupe multiplicatif, nx dans un groupe additif. Exemples usuels : groupes additifs $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, groupes multiplicatifs $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{Q}_+^*$, $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{R}_+^*$, $\mathbb{C}^*$, $\mathbb{U}$, $\mathbb{U}_n$.
Groupe des permutations d'un ensemble.	Notation S_X.
Groupe produit. Sous-groupe : définition, caractérisation. Morphisme de groupes. Image et image réciproque d'un sous-groupe par un morphisme.	
Image et noyau d'un morphisme. Condition d'injectivité. Isomorphisme.	Notations $Im f$, $\ker f$.
c) Structures d'anneau et de corps	
Anneau.	Tout anneau est unitaire. Exemples usuels : $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.
Calcul dans un anneau.	Relation $a^n - b^n$ et formule du binôme si a et b commutent.
~~Groupe des inversibles d'un anneau.~~	
Anneau intègre. ~~Corps.~~ ~~Sous-anneau.~~ ~~Morphisme d'anneaux. Isomorphisme~~.	~~Les corps sont commutatifs.~~