

DS n°4.**Durée : 4 heures**

L'évaluation se faisant principalement sur la qualité de la rédaction, vous soignerez la précision et la concision des arguments que vous avancerez au cours des démonstrations ainsi que la présentation de vos résultats en les encadrant ou les soulignant :

Vous n'oublierez pas de faire une marge à gauche sur chaque feuille, de bien inscrire le numéro des exercices, tracer un trait entre chaque question ainsi que de numéroté vos copies avant de les rendre.
la présentation peut vous faire perdre des points

La calculatrice est interdite.

Question de cours

Bernard Bolzano (5 octobre 1781 – 18 décembre 1848), de son nom complet Bernhard Placidus Johann Gonzal Nepomuk Bolzano, est un mathématicien, logicien, philosophe et théologien né et mort à Prague. Karl Theodor Wilhelm Weierstrass, habituellement appelé Karl Weierstrass, orthographié Weierstraß en allemand, né le 31 octobre 1815 à Ostenfelde (Province de Westphalie), mort le 19 février 1897 à Berlin, est un mathématicien allemand.
Énoncez et démontrez leur théorème (de Bolzano-Weierstrass) dans le cas réel.

Exercice 1 : une équation différentielle

Résoudre le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \cos(t)y'(t) + \sin(t)y(t) = \sin(2t)\cos(t) \text{ sur }]-\pi/2, \pi/2[\\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Exercice 2 : une suite récurrente

Soit $f \begin{cases}]0, +\infty[& \rightarrow &]0, +\infty[\\ x & \mapsto & 1 + \frac{2}{x}. \end{cases}$ On considère la suite récurrente (u_n) vérifiant $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 = 1$.

1. Étudier le sens de variation de f sur $[1, 3]$ et montrer que l'intervalle $[1, 3]$ est stable par f . Que peut-on en déduire sur (u_n) ?
2. Soient (v_n) et (w_n) les suites définies par $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$. Montrer que (v_n) est croissante.
3. Démontrer que (w_n) est décroissante.
4. En déduire que (v_n) et (w_n) sont convergentes et déterminer leur limite respective.
5. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?

Exercice 3 : Un anneau d'entiers

On considère $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2}; a, b \in \mathbb{Z}\}$.

1. Montrer que $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}], +, \times)$ est un anneau.
2. $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}], +, \times)$ est-il commutatif ? Est-il intègre ? (les réponses sans explications ne seront pas prises en compte)
3. On note $N(a + b\sqrt{2}) = a^2 - 2b^2$. Montrer que, pour tous x, y de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, on a $N(xy) = N(x)N(y)$.
4. En déduire que les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ sont ceux s'écrivant $a + b\sqrt{2}$ avec $a^2 - 2b^2 = \pm 1$.
5. $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}], +, \times)$ est-il un corps ?

Exercice 4

Soient A et B deux parties non vides bornées de $\mathbb{R}$.

1. Rappeler les propriétés des bornes supérieure et inférieure.
2. On considère l'ensemble $A + B$ défini par

$$A + B = \{x = a + b \mid (a, b) \in A \times B\}$$

- (a) Montrer que $A + B$ est bornée puis justifier l'existence de $\sup(A + B)$ et de $\inf(A + B)$.
- (b) Montrer les égalités suivantes :

$$\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B) \quad \text{et} \quad \inf(A + B) = \inf(A) + \inf(B)$$

3. On considère l'ensemble AB défini par

$$AB = \{x = a \times b \mid (a, b) \in A \times B\}$$

- (a) Montrer que AB est bornée puis justifier l'existence de $\sup(AB)$.
- (b) A-t-on l'égalité $\sup(AB) = \sup(A) \times \sup(B)$? Sinon donner un contre-exemple.
- (c) Montrer qu'il y a égalité si A et B sont des parties de $]0, +\infty[$.

Problème 1 : Étude d'une suite définie implicitement

On désigne par n un entier naturel non nul et l'on se propose d'étudier les racines (ou solutions) de l'équation (E_n)

$$\ln(x) + x = n$$

À cet effet, on introduit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^{++}$ par $\forall x > 0, \quad f(x) = \ln(x) + x$.

Partie I. Existence de solutions de (E_n)

1. Étudiez les variations de la fonction f .
2. Montrez que f réalise une bijection de $\mathbb{R}^{++}$ sur $\mathbb{R}$. Dédisez-en que pour tout entier naturel non nul $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation (E_n) admet une unique solution, que l'on note x_n . Ainsi, nous avons défini la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par

$$\begin{cases} \bullet & \ln(x_n) + x_n = n \\ \bullet & x_n > 0 \end{cases}$$

3. Montrez que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.
4. Donnez la valeur de x_1 . On admet qu'une valeur approchée de x_2 à 10^{-2} près est $x_2 \approx 1,55$.

Partie II. Étude de la convergence de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

1. Montrez rapidement que $\forall x \in \mathbb{R}^{++}, \quad \ln(x) < x$.
2. Établissez l'encadrement $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{n}{2} \leq x_n \leq n$.
3. Concluez quant à l'existence d'une limite pour $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Partie III. Développement asymptotique de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

1. Montrez que $x_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n$.
2. Déterminez la limite quand n tend vers $+\infty$ de $x_{n+1} - x_n$.
3. On définit pour tout entier naturel non nul $n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{n - x_n}{\ln(n)}$.
 - (a) Montrez que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n - 1 = \frac{\ln(x_n/n)}{\ln(n)}$.
 - (b) Déterminez la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.
 - (c) Prouvez alors que $1 - u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n}$.
4. Dédisez-en que pour tout entier supérieur ou égal à 2 :

$$x_n = n - \ln(n) + \frac{\ln(n)}{n} + o_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln(n)}{n} \right)$$

Problème 2 : Équations différentielles linéaires d'ordre 2

Dans ce problème, la présentation et l'organisation de vos calculs intermédiaires sera un élément important du barème.

Partie I. Équations différentielles linéaires à coefficients constants

1. Second membre polynôme-exponentielle

Déterminez l'ensemble des solutions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ de l'équation

$$y'' - 2y' + y = (t^2 + 1)e^t$$

2. Second membre exponentielle-trigo

(a) Déterminez l'ensemble des solutions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ de l'équation

$$3y'' + 4y' + y = e^{-t} \sin(t)$$

(b) Déterminez l'unique solution de (F_2) qui vérifie en outre $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

3. Second membre polynôme-exponentielle-trigo!

Déterminez l'ensemble des solutions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ de l'équation

$$y'' + 2y' + y = te^t \cos(t)$$

Partie II. Équations différentielles linéaires à coefficients continus

Étant donné un réel $m \in \mathbb{R}$ fixé, on considère l'équation différentielle

$$(1 + t^2)^2 y'' + 2t(1 + t^2)y' + m^2 y = 0$$

1. Soit $z :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable. On pose pour $t \in \mathbb{R}$,

$$y(t) = z(\text{Arctan}(t))$$

(a) Montrez que y est deux fois dérivable dans $\mathbb{R}$ et exprimez $y(t)$, $y'(t)$ et $y''(t)$ en fonction de $z(\text{Arctan}(t))$, $z'(\text{Arctan}(t))$ et $z''(\text{Arctan}(t))$.

(b) Montrez que y est solution de (F_4) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si z est solution sur $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.

(c) Résolvez cette équation différentielle et déduisez-en l'expression de la solution générale de (F_4) sur $\mathbb{R}$.

2. Montrez que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\cos(2 \text{Arctan } t) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ et $\sin(2 \text{Arctan } t) = \frac{2t}{1+t^2}$.

3. Déduisez-en une expression simplifiée de la solution générale de (F_4) lorsque $m = 2$.