

DM n°3.

Problème

Résolution d'équations différentielles par changement de variables

1. Equation de Bernoulli (mathématicien suisse 1654-1705)

On appelle équation de Bernoulli toute équation différentielle de la forme

$$(E_B) \quad y' = ay + by^\alpha$$

où $\alpha \notin \{0, 1\}$ et a et b sont des fonctions continues sur un intervalle I .

(a) Montrer qu'en posant $z = y^{1-\alpha}$, on se ramène à une équation différentielle du premier ordre.

(b) Application : Résoudre l'équation différentielle $(E_1) \quad xy' + y - xy^3 = 0$.

2. Equation de Ricatti (mathématicien italien 1676-1754)

On appelle équation de Ricatti toute équation différentielle de la forme

$$(E_R) \quad y' = ay + by^2 + c$$

où a, b et c sont des fonctions continues sur un intervalle I .

(a) Soit y_0 une solution particulière. Montrer qu'en posant $z = y - y_0$ on se ramène à une équation de Bernoulli.

(b) On considère l'équation différentielle $(E_2) \quad (1+x^2)y' - y^2 + 1 = 0$.

Déterminer une solution particulière de (E_2) puis la résoudre.

Suite récurrente

Soit $f :]0, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$ définie par $f(x) = 1 + \frac{2}{x}$. On considère la suite récurrente (u_n) vérifiant $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 = 1$.

1. Étudier le sens de variation de f sur $[1, 3]$ et montrer que l'intervalle $[1, 3]$ est stable par f . Que peut-on en déduire sur (u_n) ?
2. Soient (v_n) et (w_n) les suites définies par $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$. Montrer que (v_n) est croissante.
3. Démontrer que (w_n) est décroissante.
4. En déduire que (v_n) et (w_n) sont convergentes et déterminer leur limite respective.
5. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?