

Correction du DM n°3.

Problème

Résolution d'équations différentielles par changement de variables

1. Equation de Bernoulli

(a) Posons $z = y^{1-\alpha}$, alors $z' = (1-\alpha)y'y^{-\alpha}$.

$$y' = ay + y^\alpha \iff (1-\alpha)y'y^{-\alpha} = (1-\alpha)ay^{1-\alpha} + (1-\alpha)b \iff \boxed{z' = (1-\alpha)az + (1-\alpha)b}$$

(b) Résolution de (E_1) sur I qui désigne $]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$.

$$(E_1) \iff y' = -\frac{y}{x} + y^3 \quad \text{on pose } z = y^{1-3} = y^{-2}$$

$$(E_1) \iff z' = \frac{2}{x}z - 2 \iff z' - \frac{2}{x}z = -2$$

• Equation homogène : $z_0' - \frac{2}{x}z_0 = 0 \iff$ il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, tel que pour tout $x \in I$, $z_0(x) = \lambda e^{-A(x)}$

$$\text{avec } A(x) = -\int \frac{2}{x} dx = 2 \ln |x| \text{ donc } z_0(x) = \lambda x^2$$

• Recherche d'une solution particulière z_1 de la forme $z_1(x) = \lambda(x)x^2$ avec λ dérivable sur I .

$$z_1 \text{ est solution ssi } \lambda'(x)x^2 = -2 \iff \lambda'(x) = -\frac{2}{x^2}. \text{ Donc } \lambda(x) = \frac{2}{x} \text{ et } z_1(x) = 2x$$

Conclusion : z est solution ssi $z = z_0 + z_1 \iff$ il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, $z(x) = \lambda x^2 + 2x = \frac{1}{y^2}$ donc

$$\text{Sur } I, \boxed{(E_1) \iff \text{il existe } \lambda \in \mathbb{R}, y(x) = \frac{1}{\sqrt{\lambda x^2 + 2x}} \text{ ou } y(x) = -\frac{1}{\sqrt{\lambda x^2 + 2x}}}$$

2. Equation de Ricatti

(a) Soit y_0 une solution particulière. Posons $z = y - y_0$.

$$y \text{ est solution de } (E) \text{ ssi } y' = ay + by^2 + c \iff (z + y_0)' = a(z + y_0) + b(z + y_0)^2 + c \\ \iff z' + y_0' = az + ay_0 + bz^2 + 2by_0z + by_0^2 + c.$$

$$\text{Comme } y_0' = ay_0 + by_0^2 + c, \text{ on a } \boxed{(E_R) \iff z' = (a + 2by_0)z + bz^2}$$

On reconnaît une équation de Bernoulli avec $\alpha = 2$.

(b) La fonction constante $y = 1$ est solution particulière de (E_2) .

$$\text{Posons } z = y - 1, (E_2) \quad (1+x^2)y' - y^2 + 1 = 0 \iff (1+x^2)z' = 2z + z^2 \iff z' = \frac{2}{1+x^2}z + \frac{1}{1+x^2}z^2.$$

$$\text{Posons } u = z^{1-2} = \frac{1}{z} \text{ alors } (E_2) \iff u' = -\frac{2}{1+x^2}u - \frac{1}{1+x^2} \iff u' + \frac{2}{1+x^2}u = -\frac{1}{1+x^2} \quad (E'_2)$$

Résolution de (E'_2) sur $\mathbb{R}$:

• Equation homogène : $u_0' + \frac{2}{1+x^2}u_0 = 0 \iff$ il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, $u_0 = e^{-A}$ où

$$A(x) = \int \frac{2dx}{1+x^2} = 2 \operatorname{Arctan}(x) \text{ donc } u_0(x) = \lambda e^{-2 \operatorname{Arctan}(x)}$$

• Recherche d'une solution particulière u_1 de la forme $u_1(x) = \alpha \in \mathbb{R}^*$

$$u_1 \text{ solution ssi } \frac{2\alpha}{1+x^2} = -\frac{1}{1+x^2} \iff \alpha = -\frac{1}{2}$$

• u est solution de (E'_2) ssi $u = u_0 + u_1$ ssi il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, $u(x) = \lambda e^{-2 \operatorname{Arctan}(x)} - \frac{1}{2} = \frac{1}{z}$

$$\iff z = \frac{1}{\lambda e^{-2 \operatorname{Arctan}(x)} - \frac{1}{2}}$$

$$\text{Conclusion : } \boxed{(E_2) \iff \text{il existe } \lambda \in \mathbb{R}, y(x) = \frac{1}{\lambda e^{-2 \operatorname{Arctan}(x)} - \frac{1}{2}} + 1}$$

Suite récurrente

Soit $f :]0, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$ définie par $f(x) = 1 + \frac{2}{x}$. On considère la suite récurrente (u_n) vérifiant $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 = 1$.

1. f est dérivable de dérivée $f'(x) = -\frac{2}{x^2} < 0$ donc f est décroissante sur $[2, 3]$. On a donc $f([1, 3]) = [f(3), f(1)] = [\frac{5}{3}, 3] \subseteq [1, 3]$. On obtient ainsi par récurrence, que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [1, 3]$ (et même $\in [\frac{5}{3}, 3]$ sur $\mathbb{N}^*$).

2. Soient (v_n) et (w_n) les suites définies par $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$. Montrer que (v_n) est croissante.

On a $v_{n+1} = u_{2n+2} = f \circ f(u_n) = f \circ f(v_n)$. Or $\forall x \in D_f$, on a $f \circ f(x) = 1 + \frac{2}{1 + \frac{2}{x}} = 1 + \frac{2x}{x+2} = \frac{3x}{x+2}$.

On définit $g = f \circ f$. $[1, 3]$ est stable par g qui est croissante sur cet intervalle (car composée de deux fonctions décroissantes). Comme on a $u_1 = 3$ puis $u_2 = 1 + \frac{2}{3} \geq 1$, on a $v_1 \geq v_0$.

On montre ensuite par récurrence que pour tout entier n , la propriété $v_{n+1} \geq v_n$ est vraie (l'initialisation est établie, et l'hérédité utilise la croissance de g .)

3. On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = f(v_n)$. Or $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} \geq v_n$. En appliquant f qui est décroissante, cela donne : $f(v_{n+1}) \leq f(v_n)$ i.e. $w_{n+1} \leq w_n$

4. v est croissante et majorée (par 3 par exemple) donc converge. w est décroissante et minorée (par 1) donc converge. Les deux suites ne peuvent converger que vers un point fixe de g (raisonnement habituel). On résout l'équation $g(x) - x = 0$:

$$\frac{3x+2}{x+2} - x = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } 2.$$

Comme $-1 \notin [1, 3]$, on en déduit que les deux suites convergent vers 2. et déterminer leur limite respective.

5. u converge donc vers 2.