TD 9 : Équations différentielles linéaires

Équations différentielles linéaires du premier ordre

Ex 1 Résoudre les équations différentielles linéaires du premier ordre suivantes (on précisera bien à chaque fois l'intervalle de résolution) :

(a) $\mathrm{ch}(t)y' + \mathrm{sh}(t)y = \mathrm{ch}^2(t)$

(b) $\sin(x)y' - \cos(x)y - \sin^3(x) = 0$

(c) $(1+x^2)y' + 2xy = \dfrac{1}{x}$

(d) $|x|\,y' + (x-1)y = x^3$

(e) $xy' + y = \mathrm{Arctan}\,(x)$

(f) $x(x^2-1)y' + 2y = x^2$

(g) $y' + 2y = \dfrac{e^{-2t}}{\sqrt{1+t^2}}$

(h) $y' + \dfrac{y}{\tau} = E_0$ avec τ et E_0 réels non nuls

Indications : on intégrera par parties dans les (d) *et* (e) *pour obtenir une solution particulière. Pour le* (f)*, on remarquera que* $\dfrac{2}{x(x^2-1)} = -\dfrac{2}{x} + \dfrac{2x}{x^2-1}$.

Ex 2 Résoudre le problème de Cauchy dans les cas :

(a) $\begin{cases} y' - \dfrac{y}{x} + \ln(x) = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} xy' + y = \dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \\ y\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \end{cases}$

Équations différentielles linéaires du second ordre

Ex 3 Résoudre les équations différentielles linéaires du second ordre suivantes :

(a) $y'' + y' = 3$

(b) $y'' + y' - 2y = 2e^{-x}$

(c) $\dfrac{y''}{2} - y' + \dfrac{y}{2} = \mathrm{sh}\,(x)$

(d) $y'' + y = \cos^2(x)$

On résout l'EC puis on trouve les solutions homogènes.

Pour a) le second membre est un polynôme constant fois e^{0x} et comme 0 est racine de l'EC, on cherche une solution particulière sous la forme Axe^{0x}
pour b) -1 n'est pas racine de l'EC, on cherchera sous la forme Ae^{-x}
c) $\mathrm{sh}\,(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ donc on cherche des soutions avec $\lambda = 1$ qui est racine de l'EC, donc sous la forme Axe^x puis avec $\lambda = -1$ sous la forme Be^{-x} d) on écrit $\cos^2(x)$ à l'aide de e^{2ix}, e^{-2ix} et e^{0x}, puis on regarde si $2i$ est racine de l'EC, idem pour 0 et $-2i$, on trouve 3 solutions particulières pour ces 3 seconds membres, puis on conclut avec le principe de superposition

Ex 4 Résoudre le problème de Cauchy dans les cas :

(a) $\begin{cases} y'' - 2y' + 2y = e^x \sin(x) \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} y'' - 4y = 4e^{-2x} \\ y(0) = 0, y'(0) = 1 \end{cases}$

a) Passer en complexe et résoudre avec un second membre $e^{1+i}x$, vérifier si $1+i$ est racine de l'EC et chercher une solution particulière en conséquence
b) -2 est racine simple de l'EC, on cherche donc des solutions sous la forme Axe^{-2x}

Changement de variables

Ex 5 Résoudre les équations différentielles suivantes :

(a) $x^2y'' + 3xy' + y = 0$ en posant $t = \ln|x|$
i.e. définir $z : t \mapsto y(e^t)$ puis $z2 : t \mapsto y(-e^t)$

(b) $xy'' - y' - x^3y = 0$ en posant $t = x^2$
i.e. définir $z : t \mapsto z(\sqrt{t})$ puis $z_2 : x \mapsto z(-\sqrt{(t)})$

Ex 6 On considère sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle (E) $\quad xy'' + 2(x+1)y' + (x+2)y = \mathrm{sh}\,(x)$.

1. Montrer qu'en posant $z(x) = xy(x)$, (E) est équivalente à l'équation différentielle linéaire (L).

2. Résoudre (L) puis en déduire les solution de (E).

Ex 7 Déterminer toutes les fonctions f dérivables de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ telles que : Pour tout $x > 0$, $f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$

On procède par analyse et synthèse. Dans l'analyse, on redérive : on trouve $x^2 f''(x) + f(x) = 0$. On pose ensuite $g(x) = f(e^x)$ puis on vérifie que g est solution d'un eEDL 2 et on conclut.

Ex 8 Déterminer toutes les fonctions f continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2xf(x) = 3\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$

Par analyse puis synthèse. On dérive l'égalité et on vérifie que f est solution de l'EDL 1 $f' - \frac{1}{2x}f = 0$. Attention, il faut résoudre cette équation séparément sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sur $\mathbb{R}-*$

Ex 9 Trouver toutes les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x)f(y)$$

On dérive par rapport à la variable y puis on évalue en $y = 0$

Ex 10 Trouver toutes les fonctions f deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$$

On dérive deux fois en la variable y puis on évalue en $y = 0$
On peut aussi montrer que si la fonction f ,n'est pas la fonction nulle, alors elle vérifie $f(0) = 1$ et est paire