TD 7 : Fonctions trigonométriques réciproques

Ex 1 Donner les valeurs exactes de :

$\text{Arctan}\left(\tan \dfrac{31\pi}{6}\right)$, $\text{Arcsin}\left(\sin\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right)\right)$, $\text{Arccos}\left(\cos \dfrac{46\pi}{3}\right)$

Toutes ces compositions sont périodiques et coïncident avec l'identité sur un certain intervalle.

Ex 2 Montrer les égalités suivantes

(a) $\text{Arctan}\,\dfrac{1}{2} + \text{Arctan}\,\dfrac{1}{3} = \dfrac{\pi}{4}$ Calculer la tangente de la somme, vérifier qu'elle vaut 1. Se méfier des conclusions trop hâtives : il y a une infinité d'angles dont la tangente vaut 1

(b) $\text{Arctan}\,(2\sqrt{2}) + 2\,\text{Arctan}\,(\sqrt{2}) = \pi$Appliquer la tangente aux deux termes, utiliser les formules pour la tangente d'une somme. Attention, deux angles ayant la même tangente ne sont a priori que congru modulo au pi, il faudra justifier que le premier angle appartient à un intervalle précis pour conclure.

Ex 3 Simplifier les expressions des réels suivants :

(a) $\alpha = 2\,\text{Arctan}\,\dfrac{1}{2} + \text{Arcsin}\,\dfrac{3}{5}$ Calculer la tangente de chacun des deux termes de la somme (pour $\tan(\text{Arccos})$ on repassera par la définition : $\sin(\text{Arccos}\,(\ldots))/\cos(\text{Arccos}\,(\ldots))$ dans laquelle les deux membres de la fraction peuvent être réécrits plus simplement), puis en déduire la tangente de α. Conclure, en déterminant un intervalle auquel appartient α

(b) $\beta = \text{Arccos}\,\left(-\dfrac{4}{5}\right) + \text{Arctan}\,7$ Idem. On trouvera $\tan(\beta) = 1$ et attention à la conclusion : il faut déterminer un intervalle auquel appartient β avant de conclure.

Ex 4 Pour chacune des fonctions suivantes, préciser leurs ensembles de définition et de dérivation, calculer la dérivée puis simplifier son expression soit à l'aide des formules trigonométriques soit par intégration de la dérivée :

(a) $f_1(x) = \sin(2\,\text{Arcsin}\,x)$ $\sin(2a) = 2\cos(a)\sin(a)$

(b) $f_2(x) = \tan(\text{Arccos}\,x)$ $\tan = \frac{\sin}{\cos}$

(c) $f_3(x) = \sin(\text{Arctan}\,x)$ Utiliser le fait que $\sin^2 + \cos^2 = 1$ avec le fait que $\tan = \frac{\sin}{\cos}$

(d) $f_4(x) = \text{Arctan}\left(\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)$. Retrouver une formule due à Machin : $\text{Arctan}\,\dfrac{5}{12} = 2\,\text{Arctan}\,\dfrac{1}{5}$. Difficile, il faut trouver $f_4'(x) = \frac{1}{2(1+x^2)}$

Ex 5 On considère la fonction définie par

$$f(x) = 2\,\text{Arctan}\sqrt{\frac{1-x}{x}} + \text{Arcsin}\,(2x-1)$$

1. Déterminer son ensemble de définition.
2. On se propose de poser $\theta = \text{Arcsin}\,(\sqrt{x})$. Justifier que le changement de variable est bien défini et préciser l'ensemble décrit par θ.On aura $x = \sin^2(\theta)$ et $1-x = \cos^2(\theta)$
3. En déduire une expression simplifiée de $f(x)$.
4. Retrouver le résultat précédent en utilisant la dérivation.

Ex 6

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\text{Arctan}\,(x+1) - \text{Arctan}\,(x) = \text{Arctan}\left(\dfrac{1}{1+x+x^2}\right)$. Calculer la tangente de la différence, en justifiant que cette différence est bien dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$
2. En déduire une expression explicite de la suite (u_n) définie par $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \text{Arctan}\left(\dfrac{1}{1+k+k^2}\right)$ puis déterminer sa limite.Somme télescopique

Ex 7 Étudier et tracer la courbe représentative des fonctions suivantes :

(a) $f(x) = \text{Arcsin}\left(\sin\left(\frac{2}{1+x^2}\right)\right)$ On rappelle qu'à condition d'avoir $\frac{2}{1+x^2} \in [\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, on a $\text{Arcsin}\left(\sin\left(\frac{2}{1+x^2}\right)\right) = \frac{2}{1+x^2}$

(b) $g(x) = (x-1)^2 \,\text{Arctan}\, x$

Ex 8 Résoudre les équations suivantes :

(a) $\text{Arcsin}\, x - \text{Arcsin}\,\frac{4}{5} = \text{Arcsin}\,\frac{5}{13}$ Appliquer le sinus

(b) $\text{Arccos}\, x = \text{Arcsin}\,(2x)$ On peut raisonner par analyse puis synthèse. Dans l'analyse, on applque le sinus à l'égalité

(c) $\text{Arctan}\,(x-1) + \text{Arctan}\,(x) + \text{Arctan}\,(x+1) = \frac{\pi}{2}$ Analyse puis synthèse : dans l'analyse, on applique la tangente aux deux membres de l'égalité $\text{Arctan}\,(x-1) + \text{Arctan}\,(x+1) = \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}\,(x)$ en prenant soin que la fonction tangente y soit définie.

(d) $2\cos\theta + \sin\theta < 2$ Utiliser la méthode "Amplitude-Phase"

Ex 9 Montrer que la fonction $x \mapsto \text{Arctan}\,(e^x) - \text{Arctan}\left(\text{th}\,\frac{x}{2}\right)$ est constante.Dériver