TD 6 : Fonctions

Injection, surjection, bijection

Ex 1 Parmi les applications suivantes lesquelles sont injectives, surjectives, bijectives sur les ensembles donnés ? Sinon proposer des ensembles de départ ou d'arrivée pour lesquels elles le sont.

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair} \\ \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases} \end{array}, \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & z^5 \end{array}, \qquad h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (2x-3y, -4x+6y) \end{array}$$

f n'est pas injective mais surjective. Sa restriction à $2\mathbb{N}$ est injective.
g est surjective mais non injective : la plupart des complexes admettent 5 antécédents. Sa restriction à l'ensemble des complexes d'arguments entre 0 et $\frac{2\pi}{5}$ est injective.
h n'est ni injective ni surjective. Son image est l'ensemble des couples (x,y) vérifiant $y=-2x$.On peut la restreindre à certaines droites pour qu'elle soit injective.)

Ex 2 Montrer que les ensembles suivants sont en bijection : $\mathbb{Z}$ et $2\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$

Ex 3 Soient $f \in \mathscr{F}(E;F), g \in \mathscr{F}(F;G)$ et $h \in \mathscr{F}(G;H)$. Montrer que

1. si $g \circ f$ est injective, alors f est injective. Vu en cours
2. si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective. Vu en cours
3. si $g \circ f$ est surjective et g est injective, alors f est surjective. Penser à utiliser le fait que g est bijective dans ce cas
4. si $g \circ f$ est injective et f est surjective, alors g est injective. Penser à utiliser le fait que f est bijective dans ce cas
5. si $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives, alors f, g et h sont bijectives. En utilisant les questions précédentes, on commence par montrer que g est bijective, puis on en déduit la bijectivité de f et h

Cas des fonctions numériques

Ex 4 Parmi les applications suivantes lesquelles sont injectives, surjectives, bijectives sur les ensembles donnés ? Sinon proposer des ensembles de départ ou d'arrivée pour lesquels elles le sont.

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\backslash\{-2\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x+1}{x+2} \end{array}, \qquad f : \begin{array}{ccc} \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \exp(\tan(x)) \end{array}, \qquad f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow &]-1,1[\\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{1+|x|} \end{array}$$

1) On peut étudier la fonction, mis à part sa limite 1, tous les réels admettent un unique antécédent
2) Pas surjective car l'image est $\mathbb{R}^{+*}$
3) Étudier la fonction, en exploitant son imparité. Elle est bijective

Ex 5 Montrer que les ensembles suivants sont en bijection : $\mathbb{R}$ et $]0,1[$, $\mathbb{R}\backslash\{a\}$ et $\mathbb{R}\backslash\{b\}$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ 1) Utiliser une modification de Arctan. 2) Chercher une fonction de la forme $x \mapsto \frac{\alpha x+\beta}{x-a}$

Ex 6 Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Que peut-on dire de f^{-1} lorsque f est :
(a) monotone (b) impaire (c) paire (d) périodique a) f^{-1} a la même monotonie. b) f^{-1} c) Si f est paire, elle n'est pas injective, donc on ne peut pas définir sa réciproque (sauf éventuellement en restreignant à $\mathbb{R}^+$ mais ce n'est plus la même question) d) Si f est périodique, elle n'est pas injective (sauf éventuellement si on la restreint à une période...)

Ex 7 Soit f la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^x + x$$

1. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans J à déterminer. Théorème de la bijection

2. On pose $g = f^{-1}$. Justifier que g est dérivable sur J; Calculer $g'(1)$. Théorème de dérivation d'une fonction réciproque

3. Montrer que g est deux fois dérivable et calculer $g''(1)$. Montrer que g' est dérivable.

Images directe et réciproque

Ex 8 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - x$. f est-elle injective sur $\mathbb{R}$, surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$? Déterminer $f(\mathbb{R}^+)$ et $f^{-1}([-6,6])$. Faire un tableau de variation. f est surjective mais non injective.

Ex 9 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + x - 2$. On pose $A = [-3,-1]$ et $B = \left[0, \frac{3}{2}\right]$.
Déterminer les ensembles $f(A), f(B), f(A \cap B), f(A) \cap f(B), f^{-1}(A)$ et $f(f^{-1}(A))$. Conclure.
Étudier les variations de f

Ex 10 Soient A et B deux parties de E et f une application de E dans F.

1. Montrer que si $A \subset B$ alors $f(A) \subset f(B)$.

2. En déduire que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. Qu'en est-il de la réciproque ? Elle est fausse, considérer une fonction non injective pour trouver un contre exemple

3. Montrer que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.On procède par double inclusion

4. Reprendre les questions précédentes avec les images réciproques.

Fonctions indicatrices

Ex 11 Montrer à l'aide des fonctions indicatrices que $A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$

Ex 12 **Différence symétrique**

1. Soient $(A,B) \in \mathscr{P}(E)^2$. Montrer que $\mathbb{1}_{A \Delta B} = |\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B|$. On peut procéder par distinction de cas.

2. Montrer que Δ est associative sur $\mathscr{P}(E)$ et $\cap$ est distributive par rapport à Δ.Utiliser a question 1

Ex 13 Montrer à l'aide des fonctions indicatrices que

$$\left.\begin{array}{l} A \cup B \subset A \cup C \\ A \cap B \subset A \cap C \end{array}\right\} \Longleftrightarrow B \subset C$$