TD 12 : Structures algébriques usuelles

Structure de groupes

Ex 1 Montrer que les lois suivantes sont des lois de composition interne, puis donner leurs propriétés remarquables :
(a) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, x*y = \sqrt[3]{x^3+y^3}$ (b)$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, p \top q = p$

Ex 2 Les ensembles suivants munis de la loi donnée sont-ils des groupes ?

1. $\mathbb{R}^2$ muni de la loi $\top$: $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \forall (x',y') \in \mathbb{R}^2$, $(x,y)\top(x',y') = (x+x', ye^{x'}+y'e^{-x})$. C'est bien un groupe ! Bien justifier l'associativité. Le neutre est $(0,0)$ et l'inverse de (x,y) est $(-x,-y)$.
2. $\mathscr{P}(E)$ muni de : $\cup$, $\cap$, Δ ou $\setminus$. Avec $\cup$, le neutre est $\emptyset$ mais tous les éléments n'admettent pas d'inverse. Avec $\cap$, le neutre est E, mais tous les éléments n'admettent pas d'inverse. $A\Delta B := (A\setminus B)\cup(B\setminus A)$ le neutre est $\emptyset$ est tout élément est son propre inverse. Pour $\setminus$: pas associative.
3. L'ensemble des translations muni de la composition $\circ$.
4. L'union des translations et des symétries centrales muni de la composition $\circ$.

Ex 3 Un sous-groupe d'un groupe produit est-il nécessairement produit de deux sous-groupes? Non, considérer $\mathbb{Z}(1,1) = \{(n,n), n \in \mathbb{Z}\}$ sous-groupe de $(\mathbb{Z}^2,+)$

Ex 4 Soit $(G,*)$ un groupe tel que $\forall x \in G, x*x = e_G$. Montrer que G est commutatif. $\forall (x,y) \in G^2$, on a $x*y*x*y = e_G$, puis on en déduit que $x*y = y*x$ en le justifiant bien.

Ex 5 **Groupes d'ordre inférieur à 4**

1. Décrire les groupes constitués de 1 puis 2 éléments. Donner des exemples.
2. Soit G un groupe à 3 éléments $\{e,a,b\}$. Donner la table du groupe. Cela signifie : faire un tableau à double entrée avec les valeurs de x en colonnes, celles de y en ligne et écrire la cvaleur de $x*y$ dans la case correspondante. Donner des exemples.
3. Soit G un groupe à 4 éléments.
Montrer que dans la table du groupe chaque élément apparaît une et une seule fois par ligne et par colonne. Donner toutes les tables possibles de G. Donner des exemples.

Sous-groupes

Ex 6 **Opérations sur les sous-groupes**
Soient E et F deux sous-groupes de G.

1. Montrer que $E\cap F$ est un sous-groupe de G.
2. Montrer l'équivalence suivante : $(E\cup F$ sous-groupe de $G) \iff (F\subset E$ ou $E\subset F)$
On raisonne par l'absurde : s'il existait $x\in E\setminus F$ et $y \in F\setminus E$, on utilise alors $x*y$ qui appartient bien à $E\cup F$ on fait ensuite une distinction de cas : aucun des deux cas n'est possible.

Ex 7 Les ensembles suivants munis de la loi donnée sont-ils des groupes ?

1. $\mathbb{R},\mathbb{Q},\mathbb{D},\mathbb{Z},\mathbb{N}$ muni de l'addition dans $\mathbb{C}$, puis $\mathbb{R}^*,\mathbb{Q}^*,\mathbb{D}^*,\mathbb{Z}^*,\mathbb{N}^*$ de la multiplication dans $\mathbb{C}^*$.
2. $(1+i)\mathbb{R}$ muni de l'addition dans $\mathbb{C}$, puis de la multiplication dans $\mathbb{C}^*$.
3. $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{p+q\sqrt{2}\,|\,(p,q)\in\mathbb{Q}^2\}$ muni de $+$ puis $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]\setminus\{0\}$ muni de $\times$.

Ex 8 Soient f_1, f_2, f_3 et f_4 les fonctions de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}^*$ définies par :

$$f_1(x) = x \qquad f_2(x) = \frac{1}{x} \qquad f_3(x) = -x \qquad f_4(x) = -\frac{1}{x}$$

1. Montrer que $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ muni de la composition $\circ$ est un groupe abélien.
2. Déterminer l'ensemble de ses sous-groupes.

Ex 9 Si $(G, *)$ est un groupe, on appelle centre de G l'ensemble :

$$Z(G) = \{x \in G \,|\, \forall y \in G, x * y = y * x\}$$

1. Montrer que $Z(G)$ est un sous-groupe commutatif de G. Sou-groupe : iclus, contient le neutre, stable par produit et inverse. Commutatif : par définition, les éléments du "centre de G" sont ceux qui commutent avec tous les autres, y compris entre eux.
2. Que dire de $Z(G)$ quand G est abélien ? $Z(G) = G$

Morphismes de groupes

Ex 10 Justifier que exp est un morphisme de $(\mathbb{C}, +)$ dans $(\mathbb{C}^*, \cdot)$. Quelle est son image? Son noyau? Fait en cours

Ex 11 Déterminer tous les morphismes de $(\mathbb{Z}, +)$ dans lui-même. Lesquels sont injectifs? surjectifs? Tout est déterminé par l'image de 1.

Ex 12 Les applications $\phi : G \to H$ définies ci-dessous sont-elles des morphismes de groupes ?Application directe du cours

1. $G = (\mathbb{R}^*, \times)$, $H = (\mathbb{R}^*, \times)$, $\phi x \mapsto |x|$.
2. $G = (\mathbb{R}^*, \times)$, $H = (\mathbb{R}^*, \times)$, $\phi : x \mapsto 2x$.
3. Soit $(H, *)$ un groupe et $a \in H$. Avec $G = (\mathbb{Z}, +)$, et $\phi : k \mapsto a^k$.

Anneau et corps

Ex 13 Anneau des entiers de Gauss
On définit les ensembles $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib \,|\, (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$ et $\mathbb{Q}[i] = \{a + ib \,|\, (a, b) \in \mathbb{Q}^2\}$.

1. Montrer que $(\mathbb{Z}[i], +, \times)$ est un anneau commutatif et $(\mathbb{Q}[i], +, \times)$ est un corps. Montrer que le premier et un sous-anneau de $\mathbb{C}$ et le second un sous-corps de $\mathbb{C}$
2. $(\mathbb{Z}[i], +, \times)$ est-il un corps ? 2 admet-il un inverse dans $\mathbb{Z}[i]$
3. On définit l'application $N : \mathbb{Z}[i] \to \mathbb{N}$ par : $\forall z \in \mathbb{Z}[i], N(z) = z\bar{z}$.
   (a) Montrer que pour tout $(z, z') \in \mathbb{Z}[i]^2$, $N(zz') = N(z)N(z')$.
   (b) En déduire l'équivalence suivante :
   $$z \text{ est inversible dans } \mathbb{Z}[i] \iff N(z) = 1$$
   Si z est invesible il existe z' tel que $zz' = 1$ puis on applique N : on trouve $N(z)N(z') = 1$ or les deux termes de ce produit sont des entiers naturels donc... Pour la réciproque, les seuls éléments vérifiant $N(z) = 1$ sont ceux de $\mathbb{U} \cap \mathbb{Z}[i]$ qui est réduit à 4 éléments. On vérifie immédiatement qu'ils sont tous les 4 inversibles
   (c) Reconnaître alors l'ensemble des éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i]$ et vérifier qu'il s'agit bien d'un groupe.

Ex 14 Anneau de Boole
On appelle anneau de Boole tout anneau A qui vérifie :

$$\forall x \in A, x^2 = x$$

1. Montrer que $(\mathscr{P}(E),\Delta,\cap)$ est un anneau de Boole, puis que $\{\varnothing,X,X^C,E\}$ en est un sous-anneau quel que soit $X\subset E$.
2. Montrer les propriétés suivantes :
   (a) Pour tout $x\in A, x+x=0_A$.
   (b) A est un anneau commutatif.
   (c) Pour tout $(x,y)\in A^2, xy(x+y)=0_A$

Ex 15 Soit A un anneau. Un élément x de A est dit nilpotent s'il existe $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $x^n=0_A$.

1. Montrer que si x et y sont nilpotents et commutent alors $x+y$ et xy sont nilpotents.
2. Montrer que si xy est nilpotent alors yx aussi.
3. Soit x nilpotent. Montrer que 1_A-x est inversible et déterminer son inverse.