TD 11 : Suites réelles et complexes

Limite d'une suite

Ex 1 Étudier la monotonie des suites $(u_n)_n$ définie par :

(a) $u_n = n^2 - e^n$ (b) $u_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k+1}$ (c) $u_n = (n+1)(n+2)\dots(n+n)$

(d) $u_n = na + (-1)^n$ avec $a \in \mathbb{R}$ (e) $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+3}$ (f) $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \, dt$

a) utiliser $u_n = f(n)$ étudier la fonction f b) u_n est un produit télescopique !
c) Montrer que $u_n > 0$ et comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ avec 1 d) Regarder $u_{n+1} - u_n$ (3 cas à distinguer suivant a)
e) Regarder $u_{n+1} - u_n$ f) Regarder $u_{n+1} - u_n$ puis utiliser $0 \leqslant \sin(t) \leqslant 1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$

Ex 2 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers. Montrer que u converge si et seulement si u est stationnaire. Une implication est simple, pour l'autre, on utilisera la définition de convergence avec ε suffisament petit : $\frac{1}{2}$ fonctionnera.

Ex 3 **Théorème de Cesaro**
Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On définit la suite v par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \dfrac{u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}}{n}$.

1. Montrer que si u converge vers ℓ alors v converge aussi vers ℓ (théorème de Cesaro). Qu'en est-il de la réciproque ?
   Utiliser la défintion de convergence vers l. Pour la réciproque, $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut servir de contre-exemple.
2. Étudier la convergence de la suite u définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n} + \dots + \frac{1}{n^2}$. $u_n = \frac{w_0 + \ldots + w_n}{n}$ avec $w_n = \frac{1}{n+1}$ qui tend vers 0 et l'on peut utiliser la question précédente
3. Montrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_{n+1} - u_n) = \ell$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = \ell$.
   Utiliser l'égalité : $u_n = u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k)$

Ex 4 Étudier la convergence des suites $(u_n)_n$ définies par :

(a) $u_n = \dfrac{2n^2 + (-1)^n}{3n^2 + (-1)^{n+1}}$ (b) $u_n = \dfrac{n^2 + \cos n}{3n^3 + \sin(n^2)}$ (c) $u_n = \dfrac{3\sqrt{n} + 2\sqrt{n + \sqrt{n}} + \sqrt[3]{n}}{\sqrt[4]{n^2+3} + 2\sqrt{n+1}}$

(d) $u_n = \dfrac{2^n + n^{100}}{2^n - n^{99}}$ (e) $u_n = \dfrac{\ln(n + \ln n)}{\ln(2n + \ln n)}$ (f) $u_n = n^{\frac{1}{\ln n}}$

(g) $u_n = \dfrac{2n^2 - \mathrm{th} n}{n^2 + e^{-n}}$ (h) $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ (i) $u_n = \sqrt{n^2 - n} - n$

(j) $u_n = n \ln \sqrt{\dfrac{n+1}{n-1}}$ (k) $u_{n+1} = \dfrac{\sin(n)}{n+1}$ (l) $u_n = \dfrac{(1+i)^n}{n}$

a) Factoriser par n^2 b) Factoriser par n^3 c) Factoriser par $\sqrt{n} = n^{\frac{1}{2}}$
d)Factoriser par 2^n $\ln(2n + \dots) = \ln(n) + \ln(2 + \dots)$ f)Formule : $a^b = e^{b\ln(a)}$
g) Factoriser par n^2 h)$a^b = e^{b\ln(a)}$ puis $\ln(1 + \frac{1}{n}) = \frac{1}{n + o(\frac{1}{n})}$
i)Quantité conjuguée j) $n\frac{1}{2}\ln\left(1 + \frac{2}{n-1}\right)$ puis $\ln(1+u_n) \sim u_n$ à condition que...
k) $\sin(n)$ est bornée $|1+i| = \sqrt{2} > 1$

Suites et inégalités

Ex 5 Déterminer à l'aide d'encadrement la nature des suites $(u_n)_n$ définies par :

(a) $u_n = \sum_{k=1}^{2n+1} \dfrac{1}{\sqrt{n^2+k}}$ (b) $u_n = \dfrac{\ln(2 + \cos n)}{n}$ (c) $u_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{\lfloor kx \rfloor}{n^2}$. En déduire que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

a) $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leq \frac{1}{n}$ puis on passe à la somme
b) $1 \leq 2+\cos(n) \leq 3$ puis on passe au logarithme et on divise par n
c) $\frac{kx-1}{n^2} \leq \lfloor kx \leq kx$ puis on passe à la somme et on divise par n^2

Ex 6 Approximation de π
Soit $(u_n)_n$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} + \cdots + \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$.

1. Montrer que $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont deux suites adjacentes. Conclure quant à la convergence de u.
2. En remarquant que $\forall k \in \mathbb{N}, \displaystyle\int_0^1 t^{2k}dt = \frac{1}{2k+1}$, montrer que u converge vers $\dfrac{\pi}{4}$.

Ex 7 Irrationalité de e
Soient u et v les suites définies par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = u_n + \dfrac{1}{n!n}$.

1. Montrer que u et v convergent vers la même limite.Suites adjacentes
2. On admet que $\lim\limits_{+\infty} u = e$. Donner un encadrement de e puis en déduire que $e \notin \mathbb{Q}$.

Suites extraites

Ex 8

1. Soit $(u_{\varphi(n)})$ une suite extraite de (u_n). Montrer que toute suite extraite de $(u_{\varphi(n)})$ est extraite de (u_n). Soit ψ telle que $v = (u_{\phi(\psi(n))})_{n\in\mathbb{N}}$ alors $\phi \circ \psi$ est bien une fonction strictement croissante de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$
2. Soit (u_n) une suite réelle. Parmi les suites ci-dessous, trouver celles qui sont extraites d'une autre :
$$(u_{3n}), (u_{6n}), (u_{2n}), (u_{3.2^n}), (u_{2^n}), (u_{2^{n+1}})$$

Ex 9 Montrer que si $(u_{2n}), (u_{2n+1})$ et (u_{3n}) convergent alors (u_n) converge. On notera l et l' les limites des deux premières suites. La convergence de la troisième siute prouvera que $l = l$ et permettra de conclure

---

Suites particulières

Ex 10 Soit $(u_n)_n$ une suite arithmétique vérifiant : $u_p = q$ et $u_q = p$ avec $p \neq q$. Que vaut u_{p+q} ?

Ex 11 Soit u et v les suites définies par : $\forall n \geqslant 2, u_n = \displaystyle\prod_{k=2}^{n} \cos\left(\frac{\pi}{2^k}\right)$ et $v_n = u_n \sin\left(\dfrac{\pi}{2^n}\right)$.
Montrer que v est une suite géométrique, en déduire une expression explicite de u_n puis la convergence de la suite u.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $v_{n+1} = u_n \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$

Ex 12 Soient u et v les deux suites réelles définies par : $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n) \\ v_{n+1} = \frac{1}{6}(u_n + 5v_n) \end{cases}$ et $u_0 = 1, v_0 = 3$.

1. Déterminer deux couples de réels (λ, μ) tels que $\lambda u + \mu v$ soit géométrique.
2. En déduire les expressions de u_n et v_n en fonction de n.

Ex 13 Étudier la suite complexe $(x_n)_n$ définie par :
$$x_0 = 3 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, x_n = \frac{1}{3}x_{n-1} - 4$$

Suite arithmético géométrique

Ex 14 Étudier la convergence de la suite u définie par $u_0 \geqslant -2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$.Étudier la fonction $x \mapsto \sqrt{2+x}$: recherche d'intervalles stables, de points fixes, comparaison de $f(x)$ avec x...

Ex 15 Étudier la convergence de la suite u définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1+u_n}{1+2u_n}$. Étudier la fonction $x \mapsto x + \frac{1+x}{1+2x}$

Ex 16 Expliciter en fonction de n les suites réelles (u_n) définies par :

1. $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$ et $u_0 = 0, u_1 = 1$ (suite de Fibonacci)
2. $u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$ et $u_0 = 2, u_1 = -1$
3. $u_{n+1} = 2u_n - 2u_{n-1}$ et $u_0 = \sqrt{2}, u_1 = 2$ EC : $X^2 - X - 1 = 0$ deux racines distinctes, $u_n = Ar_1^n + Br_2^n$: on évalue A et B en obtenant un système linéaire utilisant : A, B, u_0 et u_1.
   b) EC : $X^2 - X + \frac{1}{4} = 0$ puis on évalue A et B
   c) EC $X^2 - 2X + 2 = 0$

Suites complexes

Ex 17 Soit $a \in \mathbb{C}$. Étudier la convergence et calculer la limite éventuelle de la suite (z_n) définie par

$$z_0 = a \quad \text{et} \quad z_{n+1} = \frac{1}{3}(2z_n - \overline{z_n})$$

Recherche d'un point fixe d'une certaine fonction

Relations de comparaison

Ex 18 Trouver un équivalent simple de la suite $(u_n)_n$ et déterminer sa limite :

(a) $u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$ (b) $u_n = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ (c) $u_n = \tan\left(\frac{2}{n+1}\right)$

(d) $u_n = 1 - \exp\left(\frac{1}{2^n+1}\right)$ (e) $u_n = 2^{n+1}$ (f) $u_n = \ln(n)$

(g) $u_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}$ (h) $u_n = \ln(n+1) - \ln n$ (i) $u_n = n \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$

(j) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$ (k) $u_n = n^{\frac{1}{n}} - 1$ (l) $u_n = n \ln\left(2 - \frac{1}{n}\right)$

(m) $u_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{n+1}$ (n) $u_n = \ln\left(\cos \frac{1}{n}\right)$ (o) $u_n = \left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}\right)^n - 1$

(p) $u_n = \frac{1+n^\alpha}{n^\beta}$ (q) $u_n = \frac{\ln^\alpha(n) + n^\beta}{n^\gamma}$ (r) $u_n = \frac{a^n + n^\alpha}{n^\beta}$

Ex 19 On définit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$, $u_n = \frac{S_n}{\sqrt{n}}$ et $v_n = S_n - 2\sqrt{n}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2\sqrt{n+1} - 2 \leqslant S_n \leqslant \sqrt{n} + \sqrt{n-1}$.
2. En déduire la nature des suites $(S_n), (u_n), (v_n)$ ainsi qu'un équivalent de S_n.

Ex 20 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^1 x^n \sin(x)\, dx$.

1. Montrer que u converge et préciser sa limite. Montrer que u est décroissante minorée. Pour la limite : on peut majorer u_n par $\int_0^1 x^n dx$ puis utiliser le théoème d'encadrement.
2. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sin(1)}{n}$.Primitiver x^n

Ex 21 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = x^5 + nx - 1$ sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique réel u_n tel que $f_n(u_n) = 0$.TVI
2. Déterminer le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$. En déduire que (u_n) décroît.TVI sur $]-\infty, u_n]$ pour la fonction f_{n+1}
3. Montrer que $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n}$. TVI pour f_n sur l'intervalle $[0, \frac{1}{n}]$ En déduire la limite de (u_n).
4. Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ puis que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{n^6} + o\left(\frac{1}{n^6}\right)$. Comme $u_n \to 0$ on a $u_n = 0_{n\to+\infty}(u_n)$ et l'on obtient $nu_n = 1 + o(u_n)$