TD 10 : Ensembles des nombres réels

Relation d'ordre

Ex 1 Les relations suivantes sont-elles des relations d'ordre ?

1. $\mathbb{R}$ avec $x\mathcal{R}y$ si et seulement si le point $M(x,y)$ est sur le cercle unité.
2. $\mathbb{R}$ avec $x\mathcal{R}y$ si et seulement si le point $M(x,y)$ est dans le disque unité fermé.
3. $\mathbb{C}$ avec $a\mathcal{R}b$ si et seulement si $|a| = |b|$.
4. Les droites du plan avec $\mathscr{D}\mathcal{R}\mathscr{D}'$ si et seulement si $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont parallèles entre elles.
5. $\mathbb{N}^*$ avec $a\mathcal{R}b$ si et seulement si $\exists n \in \mathbb{N}^*, b = a^n$.

Ex 2 **Problème des hussards**
Soit $(a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant p}$ une famille de np réels. Comparer $A = \min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(\max\limits_{1\leqslant j\leqslant p} a_{i,j})$ et $B = \max\limits_{1\leqslant j\leqslant p}(\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n} a_{i,j})$. Il existe un couple (i_0, j_0) et un couple (i_1, j_1) tels que $A = a_{i_0,j_0}$ et $B = a_{i_1,j_1}$ on peut comparer ces deux quantités à a_{i_0,j_1}

Bornes supérieures et inférieures

Ex 3 Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$.

1. Si $A \subset B$ et B bornée, comparer $\sup(A)$ et $\sup(B)$, puis $\inf(A)$ et $\inf(B)$.
2. On suppose que : $\forall (a,b) \in A \times B, \quad a \leqslant b$.
   Montrer que $\sup(A)$ et $\inf(B)$ existent et que $\sup(A) \leqslant \inf(B)$.

Ex 4 **Opérations sur** $\sup$ **et** $\inf$
Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$. On suppose que A et B sont majorées.

1. Montrer que $A \cup B$ admet une borne supérieure et que
$$\sup(A\cup B) = \max\{\sup(A), \sup(B)\}$$
2. On suppose que $A \cap B \neq \varnothing$. Montrer que $A \cap B$ admet une borne supérieure et que
$$\sup(A\cap B) \leqslant \min\{\sup(A), \sup(B)\}$$
   Donner un exemple où l'inégalité est stricte.

Ex 5 Soit A une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$, montrer que $\sup\limits_{(x,y)\in A^2} |x-y| = \sup(A) - \inf(A)$.
On montre que la quantité de droite : $M := \sup(A) - \inf(A)$ est un majorant de l'ensemble $A - B$. Puis on montre que $\forall \varepsilon > 0,\ M - \varepsilon$ n'est plus un majorant de l'ensemble $A - B$

Partie entière

Ex 6

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.
   Trouver un encadrmeent de $x+n$ faisant intervenir deux entiers successifs
2. Comparer $\lfloor x+y \rfloor$ et $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$.La deuxième quantité est un entier qui est inférieur à $x+y$.

Ex 7 Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\left\lfloor \dfrac{\lfloor kx \rfloor}{k} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$

Ex 8 Résoudre l'équation $\lfloor x \rfloor \times \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor = 1$. Raisonner par analyse synthèse. Dans l'analyse : un produit de deux entiers ne peut être égal à 1 que si les deux entiers valent 1 ou qu'ils valent tous les deux -1.

Ex 9 Tracer la courbe représentative de la fonction f définie par : $f(x) = \lfloor 2\,\mathrm{th}\,(x) \rfloor$.
Cette fonction est croissante et ne prend que 4 valeurs : $-2; -1; 0$ et 1. Il s'agit alors de résoudre $2\,\mathrm{th}\,(x) \geq 1$

Ex 10

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} < \dfrac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1}$.Utiliser la quantité conjugué
2. En déduire la valeur de $\left\lfloor \displaystyle\sum_{k=1}^{10000} \frac{1}{2\sqrt{k}} \right\rfloor$. l'encadrement fourni par la question précédente fait intervenir des sommes télescopiques, dont l'une se calcule explicitement et l'autre peut être approximée

Ex 11

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+\sqrt{3})^n + (1-\sqrt{3})^n$ est un entier naturel. Formule du binôme de Newton : tous les termes d'inidces impairs se compensent, ceux d'inidces pairs sont entiers
2. En déduire $\left\lfloor (1+\sqrt{3})^n \right\rfloor$. Remarquer que $-1 < 1-\sqrt{3} < 0$

Ensembles de nombres

Ex 12 **Irrationalité**

1. Que dire de la somme d'un irrationnel et d'un rationnel ? du produit d'un rationnel non nul et d'un irrationnel ? de l'inverse d'un irrationnel ? Raisonner par l'absurde de la racine carrée d'un irrationnel positif ?
2. Que dire de la somme, du produit ou du quotient de deux irrationnels ? On ne peut rien dire de particulier : trouver des exemples et des contre-exemples

Ex 13 Montrer que $a = \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$ est rationnel.
Calculer a^3. Vérifier que a est racine du polynôme $X^3 - 6X + 40$. On vérifie que 4 est racine de ce poynôme, et qu'il s'agit de son unique racine réelle, comme a est réel, $a = 4$

Ex 14 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissante telle que pour tout $x \in \mathbb{Q}$, $f(x) = x$. Montrer que $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe $a, b \in \mathbb{Q}$ tels que $a < x < b$ et $b - a < \varepsilon$ (densité de $\mathbb{Q}$).