Colle 12 : Suites.

Proposition 1 Théorème des suites adjacentes

Si u et v sont adjacentes et u croissante alors
u et v convergent vers une même limite ℓ et $\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, u_p \leqslant \ell \leqslant v_q$

Proposition 2 Caractérisation séquentielle de la densité

A est dense dans $\mathbb{R}$ ssi tout réel est limite d'une suite d'éléments de A.

Proposition 3 Critère de convergence

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ ssi $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers ℓ.

Proposition 4 Théorème de Bolzano-Weierstrass

De toute suite bornée on peut extraire une suite convergente.

Proposition 5

$(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{C}$ ssi $(\operatorname{Re}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\operatorname{Re}(\ell)$ et $(\operatorname{Im}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\operatorname{Im}(\ell)$

Proposition 6 Théorème de Bolzano-Weierstrass (complexe)

De toute suite complexe bornée on peut extraire une suite convergente.

Proposition 7 Suites arithmetico-géométriques

Connaître la méthode : on cherche ℓ vérifiant $\ell = a\ell + b$ puis on introduit $v_n = u_n - \ell$: la nouvelle suite ainsi définie est géométrique de raison a

Proposition 8 Suite récurrentes linéaires d'ordre 2 complexe

Connaître la forme générale de l'expression de u_n dans les cas $\Delta = 0$ et $\Delta \neq 0$, donner l'une des deux preuves, au choix de l'interrogateur.

Proposition 9 Suite récurrentes linéaires d'ordre 2 réelles

Connaître la forme générale de l'expression de u_n dans les cas $\Delta = 0$ et $\Delta > 0$ et $\Delta < 0$. Donner la démonstration dans le cas $\Delta < 0$.

Proposition 10 Suites récurrentes définies par $u_{n+1} = f(u_n)$

Si f est croissante sur I alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.
Si f est décroissante sur I alors $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones, de monotonies contraires
Si $f \geq id$ sur I, alors u est croissante
Si $f \leq id$ sur I, alors u est décroissante.

Proposition 11 Conséquences (Opérations sur o)

- Si $u_n = o_{+\infty}(v_n)$ et w non nulle à partir d'un certain rang alors $\frac{u_n}{w_n} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{v_n}{w_n}\right)$
- Si $u_n = o_{+\infty}(v_n)$ et $v_n = o_{n\to+\infty}(w_n)$ alors $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(w_n)$: Transitivité

Proposition 12 Théorème de croissances comparées

- $n^\alpha = \underset{n\to+\infty}{o}(n^\beta) \iff \alpha < \beta$
- $a^n = \underset{n\to+\infty}{o}(b^n) \iff |a| < |b|$
- Soient $a > 1, \alpha > 0, \beta > 0$

$$\ln^\beta(n) = \underset{n\to+\infty}{o}(n^\beta), \quad n^\beta = \underset{n\to+\infty}{o}(a^n), \quad a^n = \underset{n\to+\infty}{o}(n!), \quad n! = \underset{n\to+\infty}{o}(n^n)$$

Proposition 13 Relation d'équivalence

$\underset{n\to+\infty}{\sim}$ est une relation d'équivalence

(R) $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$

(S) $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \Longrightarrow v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$

(T) $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n \Longrightarrow u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n$

À savoir faire

- ☐ Pour une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$: chercher les points fixes de f, les intervalles stables par f, étudier la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la convergence éventuelle de cette suite.
- ☐ Déterminer l'expression d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2
- ☐ Déterminer l'expression d'une suite arithmético-géométrique
- ☐ Déterminer la monotonie d'une suite, déterminer si une suite est bornée ou non, déterminer des limites de suites à l'aide du théorème d'encadrement, ou en montrant que deux suites sont adjacentes
- ☐ Déterminer si une relation binaire donnée sur un ensemble est ou non une relation d'ordre. Déterminer la borne supérieure ou inférieure d'un ensemble simple.
- ☐ Savoir calculer des parties entières, calculer des expressions faisant intervenir des parties entières, déterminer par exemple le rang à partir duquel $\frac{1}{n}$ devient inférieure à un nombre strictement positif ε donné.

Le programme officiel

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
h) Suites complexes	
Brève extension des définitions et résultats précédents.	Caractérisation de la limite en termes de parties réelle et imaginaire.
Théorème de Bolzano-Weierstrass.	
i) Suites particulières	
Suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques.	Pour une relation de récurrence $u_{n+1} = au_n + b$ où $a \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ et $b \in \mathbb{C}$, recherche d'une solution constante, détermination des solutions.
Suites récurrentes linéaires homogènes d'ordre 2 à coefficients constants.	
Présentation de l'étude des suites définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ sur quelques exemples simples. Représentation géométrique. Si (u_n) converge vers un élément ℓ en lequel f est continue, alors $f(\ell) = \ell$.	Cette étude est l'occasion d'introduire la notion d'intervalle stable par une fonction. Pour l'étude de la monotonie de (u_n), on souligne l'intérêt, d'une part, de l'étude du signe de $f(x) - x$, et, d'autre part, de l'utilisation de la croissance éventuelle de f.
c) Relations de comparaison : cas des suites (Extrait du chapitre "Analyse asymptotique")	
Adaptation rapide aux suites des définitions et résultats relatifs aux fonctions.	Notations $u_n = O(v_n)$, $u_n = o(v_n)$, $u_n \sim v_n$.