

Colle 11 : Relations d'ordre ensembles, suites.

Résultats et preuves à connaître

Proposition 1 Conséquence 1 (Propriété de la borne inférieure sur \mathbb{R})

Toute partie de \mathbb{R} non vide minorée admet une borne inférieure. À démontrer en admettant la propriété de la borne supérieure.

Proposition 2 Densité de \mathbb{Q} et de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

\mathbb{Q} et son complémentaire dans \mathbb{R} sont denses dans \mathbb{R} .

Définition 1

Connaître les définitions, avec des quantificateurs de : u est une suite bornée/majorée/minorée/périodique/stationnaire/croissante/décroissante/convergente.

Proposition 3 Théorème

Si u converge alors u est une suite bornée.

Proposition 4 Unicité de la limite

Si u converge vers ℓ alors ℓ est unique.

Proposition 5 Somme

Si u et v convergent vers 0 alors $u + v$ converge vers 0.

Proposition 6 Produit

Si u est bornée et v converge vers 0 alors uv converge vers 0.

Proposition 7 Théorèmes généraux

Si u converge vers ℓ et v converge vers ℓ' alors $u + v$ converge vers $\ell + \ell'$ et uv vers $\ell\ell'$.

On pourra utiliser les résultats des propositions 4 et 5

Proposition 8 Lemme

Si v converge vers $\ell \neq 0$, alors à partir d'un certain rang on a $|v_n| \geq \frac{\ell}{2}$

Proposition 9 Limite d'un quotient

Si les suites u et v convergent respectivement vers ℓ et $\ell' \neq 0$ alors la suite de terme général $\frac{u_n}{v_n}$ est définie à partir d'un certain rang et converge vers $\frac{\ell}{\ell'}$

Proposition 10 Théorème de convergence par encadrement

Si $u \leq v \leq w$ à partir d'un certain rang et u et w convergent vers une même limite ℓ alors v converge vers ℓ .

Proposition 11 Théorème de la limite monotone

- Toute suite réelle u croissante et majorée converge. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n$.

Toute suite réelle u croissante et non majorée diverge vers $+\infty$.

- Toute suite réelle u décroissante et minorée converge. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} u_n$.

Toute suite réelle u décroissante et non minorée diverge vers $-\infty$.

À savoir faire

- ☐ Déterminer la monotonie d'une suite, déterminer si une suite est bornée ou non, déterminer des limites de suites à l'aide du théorème d'encadrement
- ☐ Déterminer si une relation binaire donnée sur un ensemble est ou non une relation d'ordre.
- ☐ Déterminer la borne supérieure ou inférieure d'un ensemble.
- ☐ Savoir calculer des parties entières, calculer des expressions faisant intervenir des parties entières, déterminer par exemple le rang à partir duquel $\frac{1}{n}$ devient inférieure à un nombre strictement positif ε donné.
- ☐ Résolution d'équations différentielles d'ordre 2 à coefficients constants, savoir trouver la forme générale des solutions réelles et des solutions complexes. Savoir trouver des solutions particulières avec des seconds membres de la forme $P(x)e^{\lambda x}$, ou des sommes de tels seconds membres. Résoudre des problèmes de Cauchy.

Le programme officiel

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Ensembles de nombres usuels- La fin

Tout intervalle ouvert non vide rencontre \mathbb{Q} et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

c) Généralités sur les suites réelles

Suite majorée, minorée, bornée. Suite stationnaire, monotone, strictement monotone.

Mode de définition d'une suite réelle : explicite, implicite, par récurrence.

Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée.

d) Limite d'une suite réelle

Limite finie ou infinie d'une suite.

Unicité de la limite.

Suite convergente, divergente.

Toute suite convergente est bornée.

Opérations sur les limites : combinaison linéaire, produit, quotient.

Passage à la limite d'une inégalité large.

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell > 0$, alors $u_n > 0$ à partir d'un certain rang.

Existence d'une limite par encadrement (limite finie), par minoration (limite $+\infty$), par majoration (limite $-\infty$).

Les définitions sont énoncées avec des inégalités larges.

Notations $u_n \longrightarrow \ell$, $\lim u_n$.

Produit d'une suite bornée et d'une suite de limite nulle.

Utilisation d'une majoration de la forme $|u_n - \ell| \leq v_n$, où (v_n) converge vers 0.

e) Suites monotones

Théorème de la limite monotone.

Théorème des suites adjacentes. [Sera vu en cours lundi](#)

g) Traduction séquentielle de certaines propriétés

Partie dense de \mathbb{R} .

Caractérisation séquentielle de la densité.

~~Si X est une partie non vide majorée (resp. non majorée) de \mathbb{R} , il existe une suite d'éléments de X de limite $\sup X$ (resp. $+\infty$).~~

Une partie de \mathbb{R} est dense dans \mathbb{R} si elle rencontre tout intervalle ouvert non vide.

Densité de l'ensemble des décimaux, des rationnels, des irrationnels.

~~Résultats analogues pour X non vide minorée (resp. non minorée).~~