Colle 10 : Équations différentielles-Borne sup/Borne inf

Preuves à connaître

Proposition 1 Solution générale de l'équation homogène (cas complexe)

Si a, b, c sont complexes et $a \neq 0$,

	Solutions de l'équation caractéristique	Solutions de l'équation homogène
$\Delta \neq 0$	λ_1 et λ_2 avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$	$\exists (A,B) \in \mathbb{C}^2, \forall t \in \mathbb{R}, y_H(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$
$\Delta = 0$	$\lambda_1 = -\dfrac{b}{2a}$	$\exists (A,B) \in \mathbb{C}^2, \forall t \in \mathbb{R}, y_H(t) = (At+B)e^{\lambda_1 t}$

Proposition 2 Solution générale de l'équation homogène (cas réel)

Si a, b, c sont réels et $a \neq 0$,

	Solutions de l'équation caractéristique	Solutions de l'équation homogène
$\Delta > 0$	λ_1 et λ_2 avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$	$\exists (A,B) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}, y_H(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$
$\Delta = 0$	$\lambda_1 = -\dfrac{b}{2a}$	$\exists (A,B) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}, y_H(t) = (At+B)e^{\lambda_1 t}$
$\Delta < 0$	$\lambda_1 = \alpha + i\omega$ et $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\omega > 0$	$\exists (A,B) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}$, $y_H(t) = e^{\alpha t}\left(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\right)$

Proposition 3 Solution particulière pour un second membre exponentielle Sans démonstration

Une solution particulière de (E) : $ay'' + by' + cy = A(t)e^{\lambda t}$ où A est un polynôme de degré n sera de la forme :

- $y_p(t) = B(t)e^{\lambda t}$ où B est un polynôme de degré n si λ n'est pas solution de l'équation caractéristique.
- $y_p(t) = tB(t)e^{\lambda t}$ où B est un polynôme de degré n si λ est solution simple de l'équation caractéristique.
- $y_p(t) = t^2B(t)e^{\lambda t}$ où B est un polynôme de degré n si λ est solution double de l'équation caractéristique.

Définition 1 Définitions

Connaître les définitions de : relation d'ordre, relation d'ordre totale, relation d'ordre partielle (être capable de donner un exemple pour chacun), ensemble ordonné, majorant, minorant, plus grand élément, plus petit élément.

Exercice 1 Ordre lexicographique

Montrer que $\mathbb{R}^2$ muni de l'ordre lexicographique est un ensemble totalement ordonné.

Proposition 4 Convexes de $\mathbb{R}$ (1))

- Définition Un ensemble A et dit convexe si et seulement si $\forall (x,y) \in A^2, \{tx+(1-t)y, t \in [0,1]\}$
- Soient $x \leq y$ deux réels, alors $\{tx+(1-t)y, t \in [0,1]\} = [x,y]$
- En combinant la définition avec le 2eme point, pour $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, on a

$$A \text{ est convexe } \Leftrightarrow \Big(\forall (x,y) \in A^2 \text{ tel que } x \leq y, [x,y] \subseteq A\Big)$$

- Les intervalles de la forme $[a,b]$ sont des ensembles convexes (à démontrer) et sans démonstration, on admettra que tous les autres intervalles (on rappellera les 10 types d'intervalles qui existent) sont également convexes

Proposition 5 Convexes de $\mathbb{R}$ (2)

Si A est un convexe de $\mathbb{R}$, alors c'est un intervalle.

Proposition 6 Caractérisation de la borne supérieure

$$b = \sup(A) \Longleftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A, x \leqslant b \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, x > b - \varepsilon \end{cases}$$

À savoir faire

- ☐ Toutes les techniques de calcul d'intégrales (qui peuvent servir dans un exercice de résolution d'équation différenielle).
- ☐ Résolution d'équations différentielles linéaires d'ordre 1 avec second membre (méthode de variation de la constante)
- ☐ Résolution d'équations différentielles linéaires d'ordre 2 avec second membre de la forme $P(x)e^{\lambda x}$ (ou $P(x)e^{\lambda x}\cos(\omega x)$) : résoudre une équation avec un second memebre complexe puis prendre la partie réelle).
- ☐ Savoir montrer qu'une relation binaire est une relation d'ordre Pas d'autres exercices sur le chapitre borne sup/borne inf cette semaine.

Le programme officiel

B - Primitives et équations différentielles linéaires

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
c) Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants (La fin)	
Ensemble des solutions de l'équation homogène	Si a et b sont réels, description des solutions réelles.
Principe de superposition.	
Description de l'ensemble des solutions de l'équation à partir d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène associée.	Les étudiants doivent savoir déterminer une solution particulière dans le cas d'un second membre polynôme, de la forme $x \mapsto A\,\mathrm{e}^{\lambda x}$ avec $(A,\lambda) \in \mathbb{C}^2$, $x \mapsto B\cos(\omega x)$ et $x \mapsto B\sin(\omega x)$ avec $(B,\omega) \in \mathbb{R}^2$.
Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.	La démonstration de ce résultat est hors programme.

Nombres réels et suites numériques

L'objectif de cette section est de donner une base solide à l'étude des suites réelles. On insiste sur le caractère fondamental de la propriété de la borne supérieure.

Dans l'étude des suites, on distingue nettement les aspects qualitatifs (monotonie, convergence, divergence) des aspects quantitatifs (majoration, encadrement, vitesse de convergence ou de divergence).

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Ensembles de nombres usuels	
Entiers naturels, relatifs, nombres décimaux, rationnels, réels, irrationnels.	Les constructions des ensembles de nombres usuels (et en particulier celle de $\mathbb{R}$) sont hors programme.
~~Approximations décimales d'un réel.~~	Valeurs décimales approchées à la précision 10^{-n} par défaut et par excès.
~~Tout intervalle ouvert non vide rencontre $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.~~	
~~Droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$.~~	
b) Propriété de la borne supérieure	
Borne supérieure (resp. inférieure) d'une partie de $\mathbb{R}$.	Notations $\sup X$, $\inf X$.
Toute partie non vide et majorée (resp. minorée) de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure (resp. inférieure).	
Une partie X de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si pour tous a, $b \in X$ tels que $a \leqslant b$, $[a,b] \subset X$.	